UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

ENTENDIMIENTO DE LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO RESPECTO DE LA SUMA: TAREAS CON PATRONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

PRESENTA:

FERNANDO LIMA BADILLO

DIRIGIDA POR:

DR. FERNANDO BARRERA MORA

DR. AARÓN REYES RODRÍGUEZ

Mineral de la Reforma, Hidalgo, agosto de 2018

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Institute of Basic Sciences and Engineering
Dirección
Dean

Mineral de la Reforma, Hgo., a 19 de junio de 2018

Número de control: ICBI-D/582/2018
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRO. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR

Por este conducto, le comunico que el Comité Revisor asignado al alumno Fernando Lima Badillo de la Maestría en Ciencias en Matemática y su Didáctica, con número de cuenta 342913, que presenta el manuscrito de tesis titulado "Entendimiento de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma: tareas con patrones" después de revisar el trabajo antes referido, ha decidido autorizar la impresión del mismo hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se registran las firmas de conformidad de los integrantes del Comité Revisor.

PRESIDENTE	Dr. Roberto Ávila Pozos	
SECRETARIO	Dra. Alma Sofía Santillán Hernández	
VOCAL	Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez	
SUPLENTE	Dr. José Felix Fernando Barrera Mora	

Sin otro particular, reitero a usted la seguridad de mi atenta consideración.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

Dr. Óscar Rodolfo Suárez Castillo
Director del ICBI

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
ICBI
DIRECCIÓN

ORSC/POJM

Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca - Tulancingo km. 4.5
Colonia Carboneras
Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184
Tel. +52 771 7172000 exts 2231, Fax 2109
direccion_icbi@uaeh.edu.mx

Agradecimientos

A mis padres:

Porque a pesar del tiempo y de las circunstancias, siguen apoyándome de manera incondicional. Porque cada uno de mis logros se los debo principalmente a ustedes. Gracias por nunca dejarme solo, por estar conmigo aún en los peores momentos y por continuar confiando en mí. Ustedes son y siempre serán mi principal motor y motivo para seguir.

A mis maestros:

A los doctores Aarón Víctor Reyes Rodríguez y Fernando Barrera Mora, porque sin su guía y apoyo este trabajo no habría tenido sentido. Gracias por su paciencia, por el tiempo dedicado, pero sobre todo por compartir su conocimiento y mostrarme otra manera de ver a las matemáticas. Mi admiración, gratitud y respeto siempre para ustedes.

A mis amigos:

Gracias por su compañía, por su aprecio y afecto, por sus palabras de aliento, por no dejarme desistir en ningún momento.

A mis alumnos:

Porque ustedes son el principal motivo para querer mejorar mi labor.

✝ A don David ✝:

Gracias por todo: por tu cariño, por tú guía, por tu atención, por tus palabras, por tu preocupación, por haberme acompañado en esta travesía y haber sido parte fundamental en ella. Gracias porque aún sin ser de tu familia, siempre me brindaste abrigo y me trataste como a un hijo. No olvidaré jamás tus enseñanzas y tus palabras. A donde quiera que estés, gracias totales.

A Dios:

Por sostenerme siempre.

Resumen

La presencia de las matemáticas en diversas actividades de la vida cotidiana, la ciencia y la tecnología, ha generado la necesidad de aprenderlas y utilizarlas para comprender el mundo en el que vivimos. Sin embargo, los estudiantes no dan importancia al aprendizaje de esta disciplina. Diversos investigadores coinciden en que esto se debe a que los salones de clase no ofrecen oportunidades para reflexionar, argumentar, relacionar y articular ideas matemáticas con conocimientos de otras áreas o disciplinas; es decir, aprender con entendimiento. Aprender matemáticas con entendimiento requiere que los estudiantes construyan significados para los conceptos y desarrollen habilidades que les permitan dar sentido y desarrollar fluidez para operar con símbolos, identificar estructuras y generalizar patrones. Para apoyar al estudiante a entender ideas matemáticas, las tareas de instrucción deben favorecer la formación de relaciones entre conceptos o ideas, ya sea en contextos puramente matemáticos o de otras disciplinas.

Una de las ramas de las matemáticas donde se ha observado que los estudiantes muestran dificultades es álgebra, y uno de los temas que representan mayores problemas es la factorización de expresiones algebraicas. Nosotros conjeturamos que estas dificultades se originan en procesos de instrucción ya que éstos, promueven únicamente la memorización de "catálogos de recetas" para operar con símbolos alfanuméricos (binomio al cuadrado, diferencia de cuadrados, diferencia de cubos, binomios conjugados, etcétera). Sin embargo, la expansión y factorización de expresiones algebraicas consiste en la aplicación de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Consideramos que el entendimiento de los procesos de expansión y factorización se basa en la comprensión profunda de la propiedad distributiva.

En este contexto, el presente trabajo tiene el objetivo de determinar de qué manera, tareas que involucran generalizar patrones utilizando modelos de área, pueden favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva. Para lograrlo, se diseñaron dos tareas que involucran el análisis de secuencias figurales sobre las cuales los estudiantes debían representar áreas de rectángulos de dos formas diferentes, identificar patrones y generalizarlos. Durante el desarrollo de la actividad, el rol del instructor consistió en guiar a los estudiantes para centrar su atención en las operaciones y no en los resultados. Las tareas se implementaron con un grupo de 27 estudiantes de un Centro de Bachillerato Tecnológico industrial y de Servicios (CBTis), que se ubica en una zona rural del estado de Hidalgo. Entre los principales resultados se encontró que los estudiantes muestran una tendencia a enfocar su atención únicamente en los resultados, lo cual les impidió generalizar patrones y así comprender la propiedad distributiva. Sin embargo, se identificó que las tareas fueron de utilidad para que algunos estudiantes desarrollaran cierto nivel de comprensión de esta propiedad.

Abstract

The presence of mathematical knowledge to approach several activities of everyday life, science and technology, has generated the need to understand and use this kind of knowledge to comprehend the world in which we live. However, students do not give importance to the learning of this discipline. Several researchers recognize that this fact is due to classrooms in which students do not have opportunities to reflect, argue, relate mathematical ideas and articulate the knowledge of various areas or disciplines; that is, learn with understanding. Learning mathematics with understanding requires that students construct meaning for concepts and develop skills that enable them relate symbols and other ideas or concepts, as well as to develop procedural fluency to operate with them, identify structures, and generalize patterns. Hence, to help students to understand mathematical ideas it is important that instructional tasks favor the creation of relationships between concepts, either in purely mathematical, real life or hypothetical contexts.

One of the areas of mathematics where it has been observed that students have several difficulties is algebra, and one of the issues that represent a greater conflict is factorization of algebraic expressions. We conjecture that those difficulties are due to the fact that instruction processes promote only the memorization of catalogs of recipes to operate with alphanumeric symbols (square of a binomial, difference of squares, difference of cubes, conjugated binomials, and so on). However, the expansion and factorization of algebraic expressions consists in the application of the distributive property of multiplication over addition. We consider that the understanding of expansion or factorization processes is based on a deep understanding of the distributive property.

In this context, the present work has the objective of determining how instructional tasks, that involve generalize patterns using area models can favor the understanding of the distributive property. In order to achieve this objective, we designed instructional tasks involving the analysis of figurative sequences, in which students must represent areas of rectangles in two different ways, as well as identify and generalize the patterns they observed. During the course of the activity, the instructor's role consisted in guiding students to focus their attention on the representation of operations rather than on results. The tasks were carried out for a group of 27 students from a high school (CBTis) located in a rural community of the state of Hidalgo, Mexico. The main results that we identified are that tasks were useful for the students’ development of certain level of understanding about distributive property.

Contenido **Página**

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Introducción

Las matemáticas son una ciencia que se ha desarrollado con fines prácticos y para ayudarnos a entender el mundo que nos rodea. Muchas actividades cotidianas implican la toma de decisiones, que pueden fundamentarse mediante argumentos matemáticos. Por ejemplo, cuando se está considerando adquirir un crédito bancario, es importante hacer un análisis de la información financiera para tomar la mejor decisión, la cual estará fundamentada en el cálculo de periodos de pago, monto de los intereses, etc. Por otro lado, para entender, interpretar y predecir el comportamiento de procesos o fenómenos de interés para diversas disciplinas científicas, sociales o técnicas, las ideas matemáticas juegan un rol importante.

En una sociedad dominada por las innovaciones tecnológicas, los empleadores requieren personal preparado para desarrollar nuevas ideas y con habilidades para tomar decisiones, identificar patrones y resolver problemas (Steen, 1989). Es por ello que la necesidad e importancia de que los estudiantes entiendan ideas matemáticas se ha vuelto mayor, tal como se argumenta en los Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM, 2000). Además, según algunos investigadores (Steen, 1989; Godino, Batanero y Font, 2004), contar con una sólida formación en matemáticas, podría ser un factor para obtener mejores oportunidades y opciones para trabajar o estudiar. Sin embargo, a pesar de la utilidad del conocimiento matemático, muchas personas no dan sentido ni importancia al estudio de esta disciplina.

Comúnmente, las estrategias que emplean los docentes para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes, se basan en tareas de instrucción que promueven esencialmente la memorización y aplicación de algoritmos y procedimientos rutinarios, lo que resulta poco interesante y motivador para los estudiantes (Romberg y Kaput, 1999). La enseñanza tradicional de matemáticas no favorece el aprendizaje con entendimiento (Hiebert et al., 1997). Este tipo de práctica docente ha aportado pocos elementos para que los estudiantes desarrollen la habilidad para relacionar, argumentar y comunicar ideas matemáticas. En el aula de matemáticas, este problema se hace notorio cuando los estudiantes cambian de un nivel a otro y no cuentan con los conocimientos necesarios para dar solución a problemas, o para comprender nuevas ideas o conceptos. Consecuentemente, los estudiantes muestran poco interés por el aprendizaje de la asignatura.

Las tareas de instrucción que son utilizadas para la enseñanza de matemáticas provienen, generalmente, de libros de texto o de los programas de estudio (SEMS, 2013). Dichas tareas, por lo regular, no promueven el desarrollo de procesos matemáticos relevantes tales como establecer conjeturas, generalizar, formalizar ideas, comunicar y argumentar resultados. Además, tampoco ofrecen experiencias que permitan a los estudiantes entender matemáticas, utilizarlas y desarrollar un sentido de importancia por el estudio de la disciplina (Godino, Batanero y Font, 200). Este tipo de enseñanza ha llevado a pensar a los estudiantes que saber matemáticas significa memorizar fórmulas, identificar qué algoritmo o receta utilizar para resolver un problema o desarrollar la habilidad para hacer operaciones mentalmente y obtener resultados, sin interpretar o dar sentido a las ideas matemáticas.

El aprendizaje de matemáticas va más allá de memorizar conceptos, repetir definiciones y desarrollar fluidez para ejecutar algoritmos (Godino, Batanero y Font, 2003). Saber matemáticas implica que los estudiantes cuenten con habilidades que les permitan plantear y resolver problemas, identificar patrones y generalizarlos, formular conjeturas, justificar y comunicar resultados. (Stein, Grover y Henningsen, 2012). Aunque estas habilidades son, en esencia la base del aprendizaje de matemáticas, su desarrollo representa una dificultad.

Algunos investigadores reconocen que el problema principal de muchos estudiantes, se presenta en el momento en el que surge la necesidad de utilizar una notación abstracta para representar, comunicar y expresar ideas matemáticas (Enfedaque, 1990; Godino, Batanero y Font, 2004). El uso de simbolismo está presente en muchas disciplinas, de tal modo que es difícil encontrar un área de las matemáticas, y en general de las ciencias, en la que el uso de símbolos no sea necesario. De hecho, diversas situaciones cotidianas o problemas matemáticos complejos, pueden representarse y resolverse de forma simplificada y concisa, mediante el uso de una notación abstracta. Aunque el uso del simbolismo es fundamental y está presente desde que el hombre tuvo la necesidad de contar y representar información, comprender, asimilar y utilizar símbolos, es una dificultad (Enfedaque, 1990). Los estudiantes necesitan entender las estructuras y los principios que rigen las operaciones con éstos, para representar y dar soporte a diversas ideas matemáticas.

El uso de notación simbólica, estructuras abstractas (operaciones, relaciones y sus reglas), y la generalización de patrones, se enfatiza durante el estudio de álgebra en nivel medio superior (Milton y Reeves, 2001). Sin embargo, existe la creencia común de que el álgebra se refiere únicamente, al desarrollo de la habilidad para realizar operaciones con símbolos alfanuméricos. Según la NCTM (2000), los estudiantes que aprenden álgebra deberían: (a) entender patrones, relaciones y funciones, (b) representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras algebraicas, (c) utilizar modelos matemáticos para representar relaciones y, (d) realizar análisis de cambios en diversos contextos (Barrera y Santos, 2000).

Aunque el estudio del álgebra está relacionado con el reconocimiento de patrones y relaciones entre números, objetos y formas geométricas (Windsor, 2010; Warren, 2003), esta aproximación es poco usual en la enseñanza escolarizada. Comúnmente, los procesos algebraicos se desarrollan desconectados, tanto de otros conocimientos matemáticos, como de procesos que ocurren en el mundo a nuestro alrededor (Kaput, 1999). La instrucción de matemáticas en general y de álgebra en particular, sigue basándose en ejemplificar cómo ejecutar procesos de manipulación simbólica, sin promover el desarrollo de sentido para los símbolos y la creación de relaciones o conexiones con otros conceptos o ideas (Ding y Li, 2014).

El aprendizaje de álgebra ésta directamente relacionado con el aprendizaje de aritmética. De hecho, la esencia del álgebra radica en la habilidad para generalizar las propiedades aritméticas (Edwards, 2000). Algunos investigadores consideran que el álgebra es un tipo de aritmética generalizada (Palarea y Socas, 1994; Smith, 2012; Godino, Batanero y Font, 2004; Tall, 1992). Otros, las identifican como dos áreas independientes. Por un lado, aritmética trata sobre las operaciones con números, mientras que el álgebra se refiere a la comprensión y uso de cantidades generales y sus propiedades, para operar con símbolos alfanuméricos y funciones (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006).

Para muchos docentes, aritmética está relacionada con el desarrollo de habilidad y fluidez para hacer operaciones, razón por lo que emplean tareas que centran la atención del estudiante en la operación con números para obtener un resultado; sin dar sentido a las cantidades y sin considerar la presencia de las propiedades de las operaciones. Mientras que, en álgebra, se utilizan algoritmos para ejemplificar cómo operar con símbolos, sin establecer elementos que permitan relacionar ideas aritméticas con algebraicas para dar sentido a las expresiones generales. Una de las principales dificultades que enfrentan los estudiantes de álgebra, tiene relación con la generalización y entendimiento de las propiedades de las operaciones (Enfedaque, 2000). En mayor grado, con el entendimiento de la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

Esta dificultad se observa cuando se solicita a los estudiantes expandir productos tales como $3(x+5)$ o $(x+5)$ $(x+2)$, dificultades que no están presentes al realizar operaciones numéricas como 25 por 7 o 15 por 12. El problema surge debido a que, generalmente, los docentes proponen tareas que promueven la memorización de catálogos de recetas para hacer las operaciones. Este tipo de tarea, aunque puede resultar eficiente para desarrollar fluidez procedimental, aporta poco en la construcción de entendimiento y significado para las operaciones y relaciones entre números (Edwards, 2000). Las tareas de instrucción en álgebra, al igual que en otras ramas de las matemáticas, pocas veces favorecen el desarrollo de los elementos de razonamiento y entendimiento matemático (Romberg y Kaput, 1999).

En el Programa de Estudios de Bachillerato Tecnológico (SEMS, 2013), se propone como intención formativa para la asignatura de álgebra, que el estudiante desarrolle formas de razonamiento matemático y haga uso del lenguaje algebraico para la resolución de problemas en su vida cotidiana. Sin embargo, se ha observado que, durante su tránsito por la educación media superior, los estudiantes muestran dificultades para recordar, conectar y aplicar conocimientos algebraicos con otras áreas o disciplinas y resolver problemas. Suponemos que estos problemas tienen su origen en los cursos básicos de matemáticas, donde comúnmente, no se lleva a cabo un proceso de reflexión que permita a los estudiantes relacionar conceptos o ideas, es decir, aprender con entendimiento.

Particularmente, en la asignatura de álgebra de nivel medio superior, existen dificultades para entender y aplicar las reglas involucradas en los “productos notables”, los cuales no son más que casos particulares de la *propiedad distributiva del producto con respecto a la suma* (de aquí en adelante, *propiedad distributiva*). Conjeturamos que el entendimiento de esta propiedad es crucial para que los estudiantes den sentido a la expansión y factorización de expresiones algebraicas. Habilidad que constituye un aspecto importante del pensamiento algebraico y cuya generalización es fundamental para el entendimiento de otros temas (Skane y Graeber, 1993).

1.2 Revisión de la literatura

El uso de las propiedades de las operaciones con números reales está presente desde los niveles educativos básicos. Sin embargo, los estudiantes que ingresan a nivel medio superior, raramente han reflexionado sobre éstas y no cuentan con los elementos o conocimientos que les permitan crear estrategias que faciliten su generalización. La NCTM (2000) considera que los estudiantes que egresan de nivel básico, deberían tener la habilidad de utilizar álgebra para representar situaciones problemáticas y resolver problemas. Además de contar con las herramientas para explorar y entender relaciones entre números, y las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva (Edwards, 2000). No obstante, muchos estudiantes únicamente tienen la idea de cómo realizar operaciones aritméticas básicas y con expresiones algebraicas, a partir del uso de procedimientos, sin dar sentido a los símbolos, las operaciones y a sus propiedades.

El concepto clave para lograr el entendimiento de la expansión y factorización de expresiones algebraicas, y que es indispensable para la comprensión y desarrollo de otros procesos matemáticos, es la propiedad distributiva (Kinzer y Stanford, 2015). El dominio de esta propiedad, proporciona el fundamento para diseñar estrategias eficientes para realizar cálculos mentales (NCTM, 2000). También es útil para desarrollar fluidez al operar expresiones alfanuméricas. Sin embargo, existe evidencia de dificultades o concepciones erróneas que muestran los estudiantes. Por ejemplo, al extender esta propiedad para funciones tales como $\log(x+3) = \log(x) + \log(3)$, $2\text{sen}(A+B) = \text{sen}\,(2A) + \text{sen}(2B)$ (Skane y Graeber, 1993). Identificar qué estrategias son útiles para favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva, ha sido el objeto de diversas investigaciones con estudiantes de diferentes niveles educativos.

Malara y Navarra (2009) trabajaron con estudiantes de entre ocho y diez años de edad, con el objetivo de establecer las bases para el entendimiento de la propiedad distributiva. Seleccionaron y aplicaron tres problemas de conteo cuyo resultado se podía obtener a través de sumas y multiplicaciones. Mediante la comparación de las operaciones que se utilizaron para llegar al resultado, se condujo a reflexionar a los estudiantes sobre la equivalencia entre ellas y a estructurarlas de la forma $(a \times c) + (b \times c)$ y $(a+b) \times c$. Identificando que el punto clave para lograr la conceptualización de la propiedad distributiva, consistía en enfocar la atención de los estudiantes en la comparación y reestructuración de las representaciones aritméticas.

Benson, Wall y Malm (2013) implementaron una serie de tareas con el objetivo de identificar si estudiantes de nivel básico pueden relacionar y utilizar la propiedad distributiva, como estrategia para favorecer el entendimiento del proceso de multiplicación. Las tareas conducían al estudiante a explorar e identificar la relación entre el cálculo de áreas y la propiedad distributiva. Se esperaba que, con el desarrollo de estas actividades, los estudiantes incrementaran y profundizaran su conocimiento conceptual sobre la propiedad distributiva. Los resultados obtenidos con la aplicación de las tareas, permitieron identificar que los estudiantes pueden desarrollar el entendimiento de la multiplicación, si su instrucción comienza con actividades en las que se incluya a la propiedad distributiva.

En el mismo contexto, y con un objetivo similar, Kincer y Stanford (2015) implementaron cinco tareas que incluían juegos y actividades de dibujo, en las que implícitamente estaba presente la propiedad distributiva, para favorecer el entendimiento del proceso de multiplicación y división. El trabajo consistía inicialmente en desarrollar la habilidad del estudiante para descomponer números y, posteriormente, en utilizarla para simplificar sumas y multiplicaciones de una y dos cifras. El desarrollo de la investigación permitió encontrar que la *propiedad distributiva* es la idea clave para el desarrollo del entendimiento de la operación de multiplicación, en el nivel básico.

Vermeulen, Olivier y Human (1996) realizaron un experimento de enseñanza durante cinco años, con 645 estudiantes de primaria y secundaria (tercero a séptimo grado), cuyo objetivo era facilitar el entendimiento de la propiedad distributiva. Durante el estudio se aplicaron una serie de problemas sobre compra de artículos, que requerían de la realización de cálculos complejos. Los estudiantes debían apoyarse de sus conocimientos intuitivos de la propiedad distributiva, para descomponer las cantidades en otras más simples. Las tareas fueron diseñadas para representar un conflicto cognitivo, involucrar trabajo colaborativo y permitir el uso de herramientas para realizar cálculos. Con la aplicación de las tareas se incrementó el conocimiento de la propiedad distributiva en estudiantes de secundaria, pero no en estudiantes de primaria, debido a que éstos se enfocaron en realizar únicamente los cálculos sin reflexionar sobre los procesos.

Por otro lado, Schueler-Meyer (2016), propuso a estudiantes de segundo de secundaria (octavo grado), que ya estaban familiarizados con la *propiedad distributiva,* un conjunto de expresiones algebraicas que debían expandir o factorizar. Por ejemplo, $4ab - 4a(b+4ab)$, $xy + xz + wx - vx$, $a/2(x+2z)$. El propósito consistía en distinguir en qué casos los estudiantes, podían reconocer y aplicar la propiedad distributiva. Se pudo identificar que las habilidades de los estudiantes para utilizarla, se basan en la habilidad para discernir su presencia en expresiones algebraicas. En determinadas situaciones, es necesario que el estudiante analice, orientado por el profesor, la estructura de las expresiones e identifique, en qué casos, es necesario reestructurarlas para poder utilizar la propiedad.

Skane y Graeber (1993), implementaron un modelo conceptual de instrucción basado en el trabajo de Driver (1987), con estudiantes de diversas edades que ya contaban con conocimientos de álgebra. El objetivo era identificar si el modelo podía apoyar a los estudiantes a superar concepciones erróneas de la propiedad distributiva, al operar con funciones. El modelo conceptual consistía de cinco fases de instrucción: (a) introducción al tema y motivación, (b) explicación de ideas y conceptos erróneos de los estudiantes, (c) Reestructuración de ideas, (d) consolidación de conocimientos, y (e) reflexión y refuerzo de conceptos. Los resultados obtenidos, fueron favorables. El porcentaje de estudiantes que cometían errores asociados al uso de la propiedad distributiva, se redujo. Al mismo tiempo, se identificó que, para incrementar el porcentaje de éxito, era necesario conducir a los estudiantes a discutir, argumentar ideas y validar resultados.

Larsson (2015), seleccionó un grupo de 19 estudiantes de secundaria (sexto grado), con diferentes habilidades de razonamiento, a quienes presentó tres problemas. Cada problema proporcionaba una estrategia diferente para realizar el producto de 26×19, con el objetivo de identificar cuál de éstas podía favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva. La actividad de los estudiantes consistió en analizar, evaluar cada estrategia sugerida y argumentar su validez. Se logró identificar que la estrategia de multiplicación por grupos iguales, es útil para favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva[1].

Oltenau (2017) analizó una secuencia de enseñanza implementada en dos grupos de segundo de secundaria (octavo grado), para identificar cómo el uso de tareas que involucran la aplicación de la propiedad distributiva, puede apoyar a los estudiantes a discernir la estructura de esta propiedad. El estudio se fundamentó en la teoría de variaciones y las tareas que se implementaron fueron diseñadas tomando como referencia el libro: *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics* de Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001. Las tareas involucraban el uso de la propiedad distributiva de las formas: Directa: $a\ (b+c) = ab+ac$ e inversa: $ab + ac = a(b+c)$. La secuencia dio a los estudiantes la oportunidad de entender la estructura de la propiedad y a la vez, permitió que la utilizaran para expandir y factorizar expresiones algebraicas posteriormente.

Existen diversas investigaciones que, a través del diseño e implementación de tareas y estrategias, persiguen favorecer el aprendizaje de la propiedad distributiva o cimentar las bases para su entendimiento. Sin embargo, también existen algunas que tratan de analizar las tareas propuestas por ciertos libros de texto o utilizar estrategias distintas a las empleadas comúnmente por los docentes.

Ding y Li (2014), realizaron una investigación para determinar si los libros de texto chinos pueden favorecer el aprendizaje de ciertos principios matemáticos, específicamente de la

[1] La estrategia de "Grupos Iguales (Equal Groups)", es una estrategia utilizada para la enseñanza de la multiplicación a través del conteo total de objetos contenidos en *n* grupos de igual tamaño.

propiedad distributiva. Para el estudio, se seleccionaron los libros de la serie JSEP de primero a sexto grado (12 volúmenes), y cuyo diseño está basado en los estándares del currículo nacional de matemáticas. Se revisaron un total de 319 ejercicios, de los cuales 16 eran ejemplos concretos y 303 problemas prácticos. Los problemas se planteaban en contextos aritméticos y algebraicos. Sobre éstos, se realizó un análisis con respecto a las técnicas pedagógicas empleadas y su estructura. Después del análisis, se encontró que los libros de texto chinos cuentan con recursos suficientes que permiten al estudiante dar sentido a la estructura de la propiedad distributiva y facilitar la transición de situaciones concretas a un lenguaje abstracto.

Por otro lado, Denham (2015) investigó sobre la utilidad de los juegos de video como estrategia para la enseñanza de matemáticas, ya que consideraba que éstos podían proporcionar ambientes de aprendizaje que facilitaran el desarrollo de entendimiento. Denham (2015), diseñó un juego de video llamado "Shipping Express", con tres versiones distintas, a través del cual pretendía enseñar a multiplicar a estudiantes de primaria (cuarto y quinto grado). El juego contenía distintos niveles, con determinados límites de tiempo y requerimientos. Para avanzar, era necesario hacer uso de las propiedades asociativa y distributiva para ganar tiempo. 111 estudiantes jugaron una de las tres versiones, durante 50 minutos. Después, se analizaron los resultados, en función del número de niveles que habían superado y el tipo de errores cometidos. El uso de juegos de video, como estrategia para apoyar a los estudiantes a entender las propiedades, dio buenos resultados en el caso de la propiedad asociativa. Con respecto a la propiedad distributiva, no se obtuvo un resultado, debido a que el máximo nivel alcanzado por los estudiantes era apenas la introducción a la propiedad distributiva.

Tsai y Chang (2009) propusieron un enfoque de enseñanza basado en la teoría de la matemática realista y la resolución de problemas, al que llamaron enfoque combinatorio. Las actividades se diseñaron con el objetivo de promover el entendimiento de las identidades multiplicativas y mejorar el aprendizaje de la propiedad distributiva. La tarea se aplicó en un grupo de treinta y dos personas, ocho horas a la semana, durante cuatro semanas. El rol del instructor consistió en promover la discusión y la argumentación de resultados. Esta estrategia apoyó a los estudiantes para alcanzar niveles más altos de razonamiento de la propiedad distributiva y mejoró las actitudes de los estudiantes hacia la matemática al facilitar no solo el aprendizaje de la propiedad distributiva sino también el entendimiento de las identidades multiplicativas.

1.3 Planteamiento del problema

Se han desarrollado diversas investigaciones con el objetivo de identificar qué estrategias pueden apoyar a los estudiantes a entender la propiedad distributiva. En los trabajos revisados se abordaron tareas que relacionan a la propiedad distributiva con otros conceptos matemáticos. Otros, se basaron en el planteamiento de problemas o situaciones reales (Tsai y Chang, 2009), en el uso de juegos de video (Denham, 2015) o en la utilización de construcciones geométricas. Con respecto a las tareas que tienen como objetivo favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva, a partir de construcciones geométricas, se pudo identificar dos líneas principales. La primera de ellas se enfoca exclusivamente en las operaciones aritméticas, mientras que la segunda inicia directamente con las expresiones algebraicas, sin establecer ninguna conexión entre ellas.

Las tareas propuestas en las investigaciones previas, pretendían que los estudiantes, con el apoyo y guía del instructor, pudiesen construir estrategias para realizar operaciones con símbolos (Kincer y Stanford, 2015; Larsson, 2015; Benson, Wall y Malm, 2013), desarrollar habilidad para simplificar expresiones, apoyar a los estudiantes a discernir la estructura de la propiedad distributiva (Oltenau, 2017), o bien, para sustentar el aprendizaje de conceptos, tales como el de función (Skane y Graeber, 1993). Sin embargo, en ninguna de éstas se involucran procesos de reconocimiento y generalización de patrones. Además, tampoco se considera el uso de estrategias que permitan a los estudiantes dar sentido a los símbolos y a las operaciones entre ellos.

El instructor juega un papel importante dentro del proceso de aprendizaje del estudiante (Godino, Batanero y Font, 2004). De hecho, es él quien debería decidir qué hacer en el salón de clase. Implementar, diseñar o seleccionar tareas y determinar bajo qué circunstancias se implementan y de qué manera, son algunas de las actividades que debe realizar el instructor. Sin embargo, su rol generalmente se reduce a ejemplificar cómo resolver un problema, cuya solución se basa en la aplicación de un algoritmo o receta y a proponer un conjunto considerable de ejercicios, hasta familiarizar al estudiante con una fórmula o algoritmo (Stein, Grover y Henningsen, 1996). En la mayoría de los casos, estos problemas o tareas son recuperados de libros o programas de estudio.

Uno de los principales recursos con los que cuenta el docente para guiar su trabajo y a los estudiantes, son los libros de texto. Para el aprendizaje de álgebra existe una gran variedad de libros, que incluyen diversas tareas que pretenden cumplir con determinados estándares, según la Reforma Educativa en México, y con el objetivo de fomentar el desarrollo de razonamiento o entendimiento matemático. Sin embargo, la mayoría de las tareas no son las adecuadas para cumplir estos objetivos. De manera complementaria a la revisión de la literatura, y para fines del trabajo de investigación, se realizó el análisis de algunas tareas propuestas en libros de álgebra de nivel medio superior, para identificar qué tareas y estrategias se proponen para promover el entendimiento de la propiedad distributiva.

Torres (2015) propone reglas para poder efectuar el producto de expresiones algebraicas. Por otro lado, García (2012), hace mención de la propiedad distributiva como el resultado de la suma de los productos parciales, que se obtienen al multiplicar un monomio por un polinomio (Fig. 1.1).

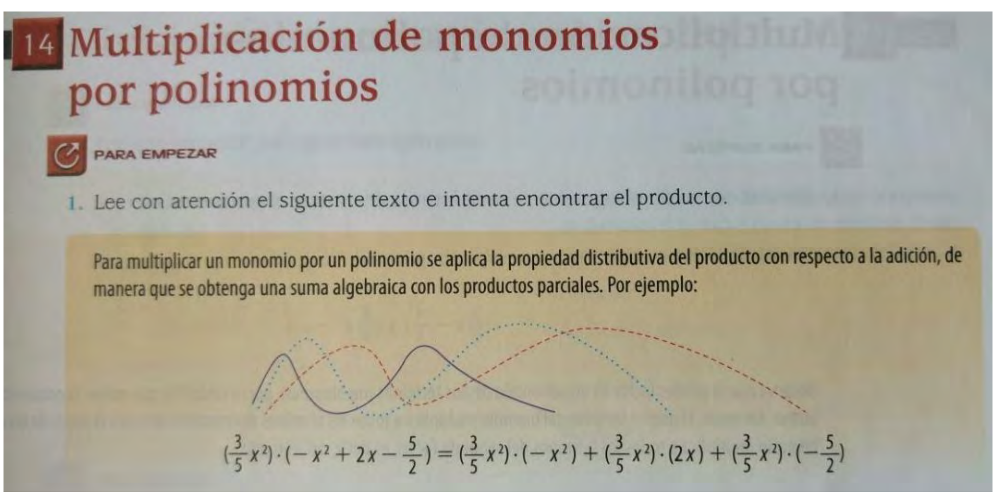
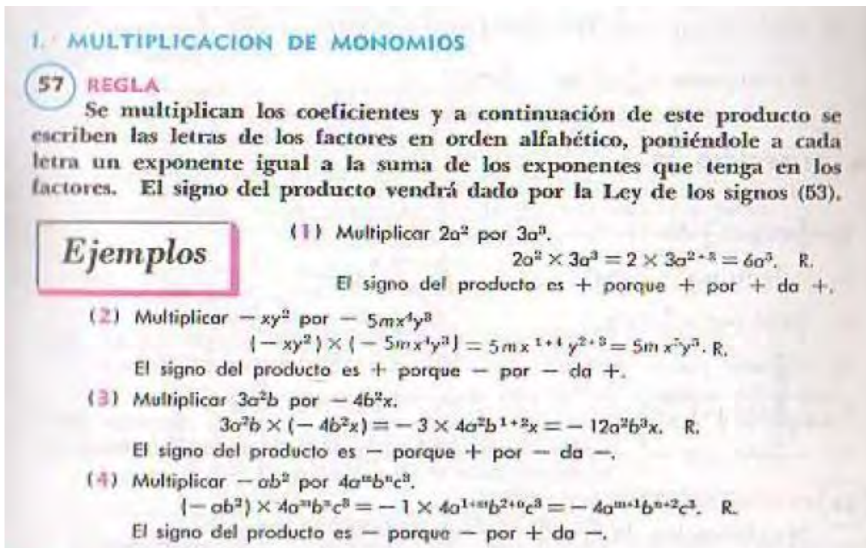


Fig. 1.1. Recursos mnemotécnicos para ayudar a recordar la regla para expandir productos de expresiones algebraicas (García, 2012).

En estos libros se utiliza de manera implícita la propiedad distributiva y se categoriza y clasifica como: producto de monomios, de monomios por polinomios y polinomios por polinomios. Aunque se supone que estos libros están diseñados para favorecer el aprendizaje, los procesos son parecidos a los propuestos en el libro de álgebra de Baldor (1997), que plantea una serie de algoritmos, según el tipo de expresión, para conducir a los estudiantes a obtener un resultado. Baldor (1997) nombra a cada proceso como regla y la clasifica según el tipo de expresión. (Fig.1.2).



I. MULTIPLICACION DE MONOMIOS

57 REGLA

Se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto vendrá dado por la Ley de los signos (53).

Ejemplos

(1) Multiplicar $2a^2$ por $3a^3$.

$$2a^2 \times 3a^3 = 2 \times 3a^{2+3} = 6a^5. \quad R.$$

El signo del producto es + porque + por + da +.

(2) Multiplicar $-xy^2$ por $-5mx^4y^3$

$$(-xy^2) \times (-5mx^4y^3) = 5mx^{1+4}y^{2+3} = 5mx^5y^5. \quad R.$$

El signo del producto es + porque − por − da +.

(3) Multiplicar $3a^2b$ por $-4b^2x$.

$$3a^2b \times (-4b^2x) = -3 \times 4a^2b^{1+2}x = -12a^2b^3x. \quad R.$$

El signo del producto es − porque + por − da −.

(4) Multiplicar $-ab^2$ por $4a^mb^nc^3$.

$$(-ab^2) \times 4a^mb^nc^3 = -1 \times 4a^{1+m}b^{2+n}c^3 = -4a^{m+1}b^{n+2}c^3. \quad R.$$

El signo del producto es − porque − por + da −.

Fig. 1.2 Procedimiento para multiplicar expresiones algebraicas (Baldor, 1997).

Cada libro revisado propone varios ejemplos que muestran como realizar el producto de expresiones algebraicas y, además, incluyen un número considerable de ejercicios con expresiones sobre las cuales, en algunas ocasiones, es necesario modificar su estructura para poder aplicar la propiedad. Esta situación resulta compleja para el estudiante, debido a que no ha desarrollado la habilidad para reconocer la presencia de la propiedad distributiva y modificar la estructura de una expresión.

Las tareas de instrucción son elementos fundamentales para apoyar el desarrollo de entendimiento (Olteanu, 2017) y éstas deberían ofrecer al estudiante oportunidades para reflexionar sobre sus experiencias, o favorecer la articulación entre conocimientos (Kaput, 1999; Skane y Graeber, 1993). Sin embargo, en los libros de álgebra, se identificaron estrategias de enseñanza basadas en la memorización de algoritmos y procedimientos, y en el desarrollo de fluidez procedimental a pesar de que, en teoría, están diseñados para promover habilidades de *razonamiento* matemático. Las tareas sugeridas en estos materiales proveen escasas oportunidades para que el estudiante pueda desarrollar entendimiento, ya que tampoco favorecen la construcción de relaciones entre conceptos o ideas matemáticas. De hecho, en los libros de texto de álgebra de nivel medio superior, se proponen actividades que suponen que los estudiantes cuentan con la habilidad de utilizar la propiedad.

Ninguna de las tareas revisadas, tanto en los libros como en las investigaciones, permite que el estudiante identifique regularidades y las generalice (Skane y Graeber, 1993; Vermeulen, Oliver y Human, 1996; Malarra y Navarra 2009, Benson, Wall y Malm, 2013; Kincer y Stanford, 2015; Larsson, 2015, Schueler-Meyer, 2016; Oltenau, 2017). En la mayoría de las tareas, tampoco se establece ningún vínculo entre la propiedad distributiva y otros conceptos. En vez de ello, se instruye de manera aislada y únicamente como un conjunto de procedimientos categorizados. En algunos casos se relaciona con otras propiedades, tales como de el de aditividad de área, interpretación geométrica o con procesos como el de multiplicación o división. Sin embargo, es abordada de manera simbólica en contextos puramente aritméticos o algebraicos, sin permitir que el estudiante de significado o valor a los símbolos o a la estructura de las expresiones.

Con base en la revisión de la literatura y el análisis de tareas propuestas en libros de texto, consideramos que el problema principal, entorno al entendimiento de la propiedad distributiva, radica en el tipo y características de las tareas que se utilizan para su enseñanza. Tradicionalmente, las tareas que son empleadas en las aulas, no favorecen el desarrollo de entendimiento, la transición de casos concretos a abstractos y tampoco proporcionan el sustento para apoyar al estudiante a corregir errores, con respecto a la propiedad distributiva (Skane y Graeber, 1993). Asimismo, se plantean en contextos que no permiten a los estudiantes darle sentido, lo que repercute posteriormente, en el desarrollo de la habilidad que los estudiantes requieren para factorizar expresiones algebraicas. Por otro lado, tampoco se encontraron trabajos que identifiquen las dificultades que muestran los estudiantes para entender la propiedad distributiva.

En este contexto, el objetivo general de este trabajo es diseñar e implementar tareas que apoyen el desarrollo de entendimiento de la propiedad distributiva, utilizando modelos geométricos y el principio de aditividad de las áreas, como herramientas para facilitar la transición de la aritmética al álgebra y el desarrollo de entendimiento. Los objetivos particulares de este trabajo son: (a) diseñar una tarea de instrucción que, con base en el análisis de casos particulares de modelos de área, permita a los estudiantes generalizar la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, y (b) identificar qué aspectos representan dificultades para la generalización y el entendimiento de la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, en estudiantes de nivel medio superior.

La pregunta que buscamos responder es ¿pueden las tareas que involucran generalizar patrones utilizando modelos de área, favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva, en estudiantes de un bachillerato que se ubica en una comunidad rural del estado de Hidalgo?

1.3.1. Hipótesis

El uso de tareas de instrucción, basadas en cálculo de áreas usando el principio de aditividad, permite a estudiantes de bachillerato generalizar y dar sentido a la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma. Además, permiten dar significado y sentido a los símbolos algebraicos y a las operaciones con ellos.

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 Introducción

Un marco de investigación puede considerarse como una estructura básica de ideas, principios, acuerdos o reglas que proporcionan las bases y lineamientos para orientar el proceso de investigación (Lester, 2010). Es posible también conceptualizar a un marco de investigación como un conjunto de ideas, conceptos o abstracciones que dan soporte al trabajo de investigación. Estas abstracciones y sus relaciones, representan las características más relevantes de un fenómeno (Eisenhart, 1991). Un marco de investigación puede clasificarse según las características de su estructura. Con respecto a investigación en educación matemática, los principales marcos de investigación que podemos encontrar, son: teórico, práctico y conceptual.

Un marco teórico puede definirse como una estructura que guía la investigación basada en una teoría formal. Por ejemplo, la epistemología genética de Piaget, la Teoría socio-constructivista de Vygotsky, la teoría de resolución de problemas de Newell y Simon, entre otras. Un marco práctico está orientado por la experiencia que se ha obtenido de la actividad profesional o de investigaciones previas que se han realizado. Por otro lado, un marco conceptual es una estructura de ideas en la que se argumenta por qué diferentes puntos de vista, conceptos, enfoques y perspectivas, son útiles para entender o explicar un fenómeno educativo (Eisenhart, 1991). Considerando que para el desarrollo de este trabajo se utilizaron diversos conceptos e ideas, se adoptó un marco conceptual.

Para la integración del marco conceptual de este trabajo se consideran tres dimensiones: ontológica, epistemológica y didáctica. La perspectiva ontológica consiste en adoptar una postura con respecto a lo que son las matemáticas y el aprendizaje. En la perspectiva epistemológica se expondrán nuestras ideas con respecto a *¿cómo se aprende?*, mientras que en la perspectiva didáctica se explica cuáles son, para nosotros, las características deseables que debe incluir el aprendizaje (aprendizaje estructurado) y cuáles son las tareas y el escenario de instrucción que pueden apoyar el desarrollo de entendimiento de las ideas matemáticas.

2.2 Dimensión ontológica

Un punto fundamental en todo marco conceptual es presentar la concepción con respecto a lo que son las matemáticas y cómo es que se desarrolla su aprendizaje. Las ideas que el docente posee sobre el significado de las matemáticas influirán directamente en su actuar (Godino, Batanero y Font, 2004; Schoenfeld 1992). Con base en esta idea, consideramos importante dar a conocer la forma en que conceptualizamos a las matemáticas y su aprendizaje.

2.2.1 La concepción de las matemáticas

Hoy en día se puede apreciar la presencia de las matemáticas en muchas de las actividades cotidianas que realizamos. Las matemáticas están presentes en la industria, el comercio, la arquitectura, la medicina, en muchas otras disciplinas y áreas del conocimiento. Su importancia es tal que la necesidad de entenderlas y utilizarlas, nunca había sido mayor (NCTM, 2000). Pero, ¿qué son las matemáticas? Actualmente es posible encontrar ideas muy variadas de lo que son las matemáticas. Tymockzko (1986) y Ernest (1991) la conceptualizan como: (1) la actividad humana que envuelve la solución de situaciones problemáticas, (2) un lenguaje simbólico a través del cual, los problemas y sus soluciones, pueden ser expresados y (3) un sistema conceptual organizado lógicamente.

Para Godino, Batanero y Font (2004) las matemáticas constituyen el armazón sobre el que se construyen los modelos científicos, forman parte del proceso de modelación de la realidad e incluso sirven como medio para validar estos modelos. Gómez (1997) concibe a las matemáticas como la ciencia que estudia, por medio de sistemas hipotético-deductivos, las propiedades de los números, las figuras geométricas y otros conceptos matemáticos, así como las relaciones entre ellos. Para otros, las matemáticas se definen como la ciencia de los patrones (Steen, 1988; Schoenfeld, 1992; Devlin, 2000). Esta última concepción es la que mejor describe los principales procesos del pensamiento matemático, siendo uno de ellos, la identificación, generalización y representación de patrones.

Diversos problemas de la ciencia o la industria se pueden resolver a través de la construcción de estructuras u objetos matemáticos, que surgen de procesos que involucran el reconocimiento de patrones. Los patrones o regularidades se pueden encontrar en situaciones físicas, numéricas, geométricas, y como parte del funcionamiento de la mente humana. Es través de su identificación y el análisis de las relaciones entre ellos, que se pueden generalizar y utilizar para explicar y modelar fenómenos. Por estas razones compartimos la concepción de que las matemáticas son la ciencia de los patrones (Steen, 1988).

2.2.2 Aprendizaje de las matemáticas

El conocimiento matemático puede ser visto como una colección de hechos y procedimientos relacionados con cantidades, magnitudes, formas y las relaciones entre ellos (Schoenfeld, 1992). Esta idea ha llevado a pensar erróneamente a muchos docentes, que el aprendizaje de matemáticas puede desarrollarse por memorización y repetición, es decir, que el estudiante aprende cuando consigue memorizar una fórmula o algún algoritmo para resolver una cantidad considerable de ejercicios. Sin embargo, aprender matemáticas va más allá de solo repetir definiciones, fórmulas o identificar las propiedades de números, objetos y figuras (Godino, Batanero y Font, 2004). Aprender matemáticas implica desarrollar habilidades para utilizar un lenguaje e ideas matemáticas para resolver problemas. El estudiante que sabe matemáticas, debe ser capaz de imaginar, diseñar, proponer nuevas ideas, razonar, relacionar conceptos y argumentarlos (Santos-Trigo, 2007; Barrera y Reyes, 2016).

Aunque los estudiantes están en contacto con las matemáticas de manera cotidiana, el desarrollo de su aprendizaje se da a través de las experiencias que son propuestas por el docente en el salón de clase (NCTM, 2000; Godino, Batanero y Font, 2004; Barrera y Reyes, 2016). El desarrollo de las habilidades matemáticas y la capacidad de utilizarlas, están condicionadas por las tareas y la organización del trabajo que el profesor propone en el aula. Consideramos que, para lograr un aprendizaje con entendimiento de matemáticas, es indispensable ofrecer a los estudiantes la oportunidad de articular ideas para generar nuevas e involucrar procesos de reflexión y comunicación (Hiebert et al., 1997).

2.2.3 Aprendizaje del álgebra

Algunos investigadores coinciden en que el razonamiento algebraico es fundamental para el aprendizaje y desarrollo de diversas habilidades matemáticas (Palarea y Socas, 1994; Kaput, 1999; Edwards, 2000; Milton y Reeves, 2001; Radford, 2006). El razonamiento algebraico es el proceso a través del cual los estudiantes generalizan ideas matemáticas (Warren, 2003). Además, conecta el aprendizaje y la enseñanza de aritmética y cálculo y proporciona las bases para el desarrollo del entendimiento de un lenguaje abstracto. Razonar algebraicamente implica representar, generalizar y formalizar regularidades a partir de la exploración de patrones, estructuras matemáticas y sus relaciones, mediante el uso de un sistema simbólico (Kaput, 1999; Milton y Reeves, 2001). El razonamiento algebraico se puede fundamentar en la habilidad para identificar patrones y generalizarlos (Godino, Castro, Aké, y Wilhelmi, 2012; Ontario Ministry of Education, 2013).

Los patrones surgen del mundo que nos rodea y están presentes en todas partes. En la naturaleza podemos identificarlos en las flores, en las hojas de las plantas, en las manchas de un leopardo o en las trayectorias de vuelo de las aves. También están presentes en la música, la arquitectura y en muchas ciencias. Diferentes tipos de patrones, dan lugar a diferentes ramas de las matemáticas. Por ejemplo, la teoría de números se encarga del estudio de patrones de conteo; geometría estudia los patrones de forma; cálculo nos permite analizar los patrones de movimiento; lógica, los patrones de razonamiento; probabilidad se ocupa de los patrones de azar; la topología se encarga del análisis de los patrones de cercanía y posición (Devlin, 2000). Sin embargo, debido a que estos son, en su mayoría abstractos, su descripción y estudio requieren del uso de un sistema de notación que facilite su expresión y representación.

Siempre que surge la necesidad de representar una generalidad, el simbolismo y el uso de lenguaje algebraico son de gran utilidad, ya que éstos, proporcionan los elementos para generalizar ideas matemáticas y describir patrones. Con el uso del lenguaje algebraico, también es posible representar relaciones entre cantidades, simplificar y resolver cierto tipo de problemas (Usiskin, 1995), y, además, son el medio apropiado para describir las propiedades de las operaciones (Edwards, 2010). Álgebra proporciona el fundamento matemático para dar soporte al trabajo en diversas áreas de conocimiento y su enseñanza está presente desde niveles básicos. Sin embargo, la enseñanza de álgebra se ha restringido a ejemplificar y mostrar a los estudiantes como realizar procesos de manipulación simbólica.

Esta situación ha llevado a pensar, tanto a docentes como a estudiantes, que el aprendizaje de álgebra se logra memorizando reglas para operar con símbolos, resolviendo ecuaciones y simplificando expresiones. Por esta razón, en la mayoría de los casos, los conocimientos algebraicos no son relacionados o vinculados con otras ideas o conocimientos, tanto de matemáticas como de otras ciencias.

Kieran (1992), Palarea y Socas (1994), Warren (2003) y Enfedaque (2000) resaltan que una de las principales dificultades que enfrentan los estudiantes para el aprendizaje de álgebra, está relacionada con la necesidad de manipular símbolos (letras) y dotar a éstos de sentido. Algunos investigadores coinciden en que esta dificultad puede surgir desde que el estudiante aprende aritmética (Kieran, 1992; Palarea y Robayna; 1994; Usiskin, 1995; Godino et al., 2012). De hecho, existe evidencia de que algunas de las dificultades que enfrentan los estudiantes al aprender álgebra, pueden surgir del cambio abrupto de aritmética a álgebra (Palarea y Socas, 1994; Warren, 2003; Milton y Reeves, 2001).

Comúnmente, álgebra se enseña después de aritmética, con la idea de que el conocimiento aritmético proporciona las bases para el desarrollo del algebraico. Sin embargo, la enseñanza de aritmética se enfoca en el desarrollo de algoritmos para operar con números y obtener resultados, mientras que la de álgebra, comienza directamente con el uso de símbolos y es enfocada a la aplicación de reglas o procedimientos que muestran al estudiante como manipularlos. En ningún momento, se establecen conexiones que favorezcan la relación o transición de aritmética a álgebra, ni tampoco que permitan dar sentido a los símbolos (Kaput, 1999; Milton y Reeves, 2001).

El uso de símbolos y el significado que los estudiantes asignan a ellos, son elementos fundamentales para que se pueda favorecer la transición de aritmética al álgebra (Kieran, 1992; Rojas-Garzón y Vergel-Causado, 2013). Con el uso de símbolos (o letras), es posible representar cantidades y relaciones generales y también simplificar y resolver problemas (Edward, 2010).

2.2.4. El papel de los símbolos en el aprendizaje de álgebra

Uno de los propósitos formativos que se indica en el currículo de álgebra de nivel medio superior, es que los estudiantes aprendan a representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras, a partir del uso del lenguaje algebraico (SEMS, 2013). Para poder comprender y hacer uso de este lenguaje, los símbolos juegan un papel fundamental.

Existen dos habilidades que son claves para el desarrollo del entendimiento de álgebra e incluso, son necesarias para el desarrollo de diversas ideas matemáticas. La primera es la habilidad de reconocer patrones e identificar regularidades, a través de los cuales es posible hacer inferencias o tomar decisiones. La segunda, es la habilidad de usar símbolos para denotar números y manipularlos. Sin embargo, a pesar de que ambas habilidades son utilizadas por el ser humano desde hace miles de años (Devlin, 2000), y que éstas han hecho posible el desarrollo de muchas ramas de las matemáticas, su desarrollo no ha sido fácil, en especial el de la segunda habilidad.

La única forma de estructurar ideas matemáticas es aprendiendo a dar sentido y uso a los símbolos (Kieran, 1992; Devlin, 2000), razón por la cual, surge la necesidad de utilizar una notación simbólica y dominar ciertas reglas que permitan manipularlos. El uso de símbolos tales como letras, palabras o imágenes para representar y manipular cantidades, es una de las principales dificultades que enfrentan los estudiantes de diversos niveles. Algunos investigadores coinciden en que este problema se origina debido a la diversidad de formas en las que se pueden interpretar (Enfedaque, 1991; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012).

Los estudiantes pueden conceptualizar a las literales como: (a) *letra evaluada*: a la letra se le asigna un valor numérico desde el primer momento, (b) *letra no usada*: la letra es ignorada, o se reconoce su existencia pero no se le da un significado, (c) *letra como objeto*: la letra es vista como una abreviatura de un objeto o como un objeto, (d) *letra como incógnita específica*: la letra es un número específico, concreto, aunque desconocido de primer momento, (e) *letra como número generalizado*: puede tomar varios valores y (f) *letra como variable*: representa un rango de valores que generalmente describen la relación entre dos conjuntos pero que son desconocidos de primer momento (Küchemann, 1981, citado en Enfedaque, 1991; Godino y Font, 2003).

Para conseguir que los estudiantes puedan hacer una transición de aritmética a álgebra, consideramos que es necesario que los símbolos sean interpretados como variables, ya que éstas son la clave para poder expresar las regularidades (Godino y Font, 2003; Edwards, 2000).

2.3 Dimensión epistemológica

Diversas teorías han surgido para tratar de explicar cómo es que se genera el conocimiento matemático, debido a la complejidad presente en los procesos o situaciones de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. Algunas de estas teorías enfatizan que el conocimiento matemático es un producto social, es decir, el conocimiento se construye en contextos donde se promueve la interacción social entre los individuos (Ernest, 2010; Simon, 1993,1994; Cobb y Yackel, 1993), en vez de ser solo resultado de la experiencia individual. De hecho, el conocimiento individual y social están estrechamente relacionados y cada uno limita o contribuye al otro.

Este trabajo se aborda desde una perspectiva socioconstructivista del aprendizaje. Bajo esta perspectiva se ofrece un espacio para la diversidad de formas de participación y pensamiento de los estudiantes. La idea central es que los estudiantes construyen activamente, y en grupo, su propio conocimiento en vez de copiarlo o absorberlo de otros. El conocimiento individual está formado por un conjunto de estructuras cognitivas que inicialmente, se constituyen en función de las ideas y concepciones propias de los individuos. Cuando el individuo se involucra en comunidades de aprendizaje, este conocimiento es constantemente reorganizado o reestructurado por influencia del contexto y las interacciones que se desarrollan en él (Ernest, 2010).

Los individuos forman parte de comunidades que refuerzan y limitan su desarrollo de conocimiento. Particularmente, en el salón de clase hay una comunidad que influye en las oportunidades de aprendizaje matemático de los estudiantes. Los individuos que participan en el aprendizaje de matemáticas, son miembros de comunidades que están involucradas en el desarrollo de conocimientos que son considerados-como-compartidos, taken-as-shared en inglés (Simon, 1993, 1994). El término, conocimiento considerado como compartido, se refiere al conocimiento que se supone que es compartido por otros. Por ejemplo, al hablar del objeto silla, podríamos suponer que los demás piensan en el mismo objeto. Sin embargo, la imagen mental del objeto y sus características son diferentes para cada individuo. Los miembros de una comunidad no tienen el mismo conocimiento que otros. Sin embargo, comparten ideas sobre los significados que se asocian con los conceptos o procesos matemáticos.

Los conocimientos que tienen los estudiantes son únicos para ellos. En algunas ocasiones, estos conocimientos no son suficientes para resolver un problema, por lo que es necesario que los estudiantes interactúen en comunidades, negociando significados (Simon, 1994), intercambiando ideas y estructurando nuevas. Esta negociación, o intercambio de ideas, surge cuando son expuestos a situaciones que generan un desequilibrio cognitivo, es decir, cuando el conocimiento, formado por todas las estructuras cognitivas del individuo, no es suficiente para abordar o enfrentar un problema. Este desequilibrio conduce a una actividad mental que promueve la creación de relaciones entre conceptos o ideas que, a su vez, genera que las estructuras cognitivas sean reorganizadas o reestructuradas.

Las interacciones sociales, especialmente profesor-estudiante y estudiante–estudiante, sirven como catalizadores para la construcción de conocimiento individual (Cobb y Yackel, 2011). Difícilmente los estudiantes, por sí solos, pueden encontrar relaciones entre diversas situaciones o contextos y utilizar su conocimiento para abordar problemas. Bajo esta perspectiva de aprendizaje, se busca promover la visión de una matemática en la que los estudiantes, de manera individual o en grupos, se involucren en la exploración de situaciones matemáticas, la formulación y validación de hipótesis, y en la explicación, justificación y negociación de significados. Los estudiantes deben participar con un rol activo, creando y evaluando conjeturas. De esta manera, la instrucción de matemáticas debe hacer posible que los estudiantes construyan conocimiento.

2.4 Dimensión didáctica

El significado que atribuimos a las interacciones sociales, como fuente de oportunidad para el desarrollo de aprendizaje, es un factor a considerar durante el proceso de enseñanza de matemáticas. Sin embargo, no existen recetas ni algoritmos para ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas o a los docentes a enseñar. Además, no se cuenta con una guía para diseñar o seleccionar las tareas de instrucción adecuadas (NCTM, 2000). Son las decisiones y acciones que el docente toma o dirige en el aula, las que influyen directamente en la forma en la que los estudiantes aprenden matemáticas.

La actividad matemática esencial no consiste en aplicar reglas y algoritmos, sino en inventar reglas, algoritmos y procedimientos que nos permitan entender los patrones y regularidades que aparecen en nuestro mundo (Barrera y Reyes, 2013). Por esta razón, uno de los objetivos que actualmente se persigue con la enseñanza de matemáticas, es desarrollar en el estudiante la habilidad para pensar y razonar matemáticamente. Los estudiantes deben contar con conocimientos que puedan usar con flexibilidad, adaptarlos a nuevas situaciones y utilizarlos para relacionar o conectar ideas que les permitan aprender cosas nuevas. No basta con acumular un conjunto de hechos y procedimientos, hay que comprenderlos. Consideramos que esto se logra a través del desarrollo de aprendizaje con entendimiento.

Compartimos la idea de Shafer y Romberg (1999) en el sentido que, el aprendizaje se logra cuando se ofrece a los estudiantes la oportunidad de hacer conexiones entre las ideas matemáticas que poseen, o se les da la oportunidad de articularlas con otras nuevas. Para poder construir aprendizaje con entendimiento, las tareas de instrucción juegan un papel importante, ya que éstas, son el medio a través del cual los docentes presentan ideas matemáticas y a través de las cuales es posible comprometer y desafiar intelectualmente a los estudiantes.

2.4.1 Aprendizaje con entendimiento

Actualmente, muchos estudiantes no dan sentido al aprendizaje de matemáticas y, además, perciben a la disciplina como algo innecesario y desconectado de la realidad en la que viven o de otros conceptos o conocimientos matemáticos. Comúnmente, las tareas de instrucción no permiten la creación de relaciones o conexiones entre conocimientos o ideas y por lo tanto limitan la construcción y desarrollo de aprendizaje con entendimiento. Decir que el estudiante ha aprendido con entendimiento, se refiere a que tiene la capacidad de relacionar o articular sus ideas o conocimiento con otros temas o conceptos. Esta articulación de ideas, requiere que éstas sean comunicadas, ya sea verbalmente, por escrito o a través de medios tales como imágenes, diagramas, tablas o modelos. Implica también el desarrollo de procesos reflexión sobre los conocimientos que se poseen y la forma en la que serán reorganizados o reestructurados para afrontar nuevos problemas o situaciones.

Cuando los estudiantes adquieren aprendizaje con entendimiento, ellos mismo pueden aplicar su conocimiento para aprender nuevos conceptos, explorar nuevas ideas o buscar nuevos métodos para resolver problemas (Carpenter y Lehrer, 1999). Esto les permite ampliar sus habilidades y, por ende, la forma de percibir a la asignatura. Cuando los estudiantes son capaces de identificar relaciones entre conceptos y procesos, son más propensos a reconocer la utilidad de su conocimiento y relacionarlo con nuevas situaciones (Kaput, 1999). En caso contrario, el conocimiento que adquieren es de poca relevancia, volátil y su utilidad se ve reducida. Esta situación origina que el conocimiento matemático se perciba de manera aislada y, en algunos casos, sea considerado como innecesario. Pero, ¿cómo es que se desarrolla este entendimiento? y ¿cómo se favorece la construcción de aprendizaje con entendimiento?

2.4.2 Ciclo para desarrollar el entendimiento.

El entendimiento no se logra de un momento a otro, requiere que el estudiante experimente cierta actividad mental derivada de situaciones o contextos propuestos por el instructor. Para que se pueda dar un aprendizaje con entendimiento, se debe ofrecer al estudiante la oportunidad de: (a) construir relaciones, (b) extender y aplicar el conocimiento matemático que posee, (c) reflexionar sobre sus experiencias previas, (d) articular los conocimientos y (e) apropiarse del conocimiento matemático (Carpenter y Lehrer, 1999). Para lograrlo, se requiere que los estudiantes desarrollen ciclos sucesivos de: acción, observación, formulación de conjeturas y comunicación de resultados (Barrera y Reyes, 2016) (Fig. 2.1).

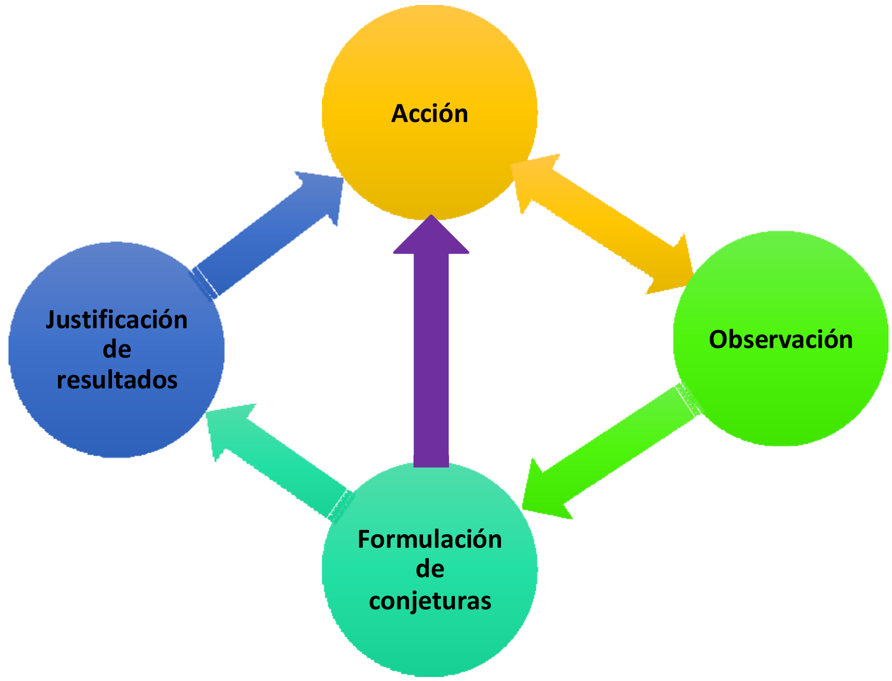


Fig. 2.1 Ciclo básico para desarrollar entendimiento matemático.

El entendimiento se desarrolla a medida que el estudiante busca, prueba y encuentra relaciones entre las ideas o conceptos que posee, o bien cuando relaciona y estructura nuevas ideas con las que ya tiene. Con el desarrollo de entendimiento, los hechos, procedimientos y conocimientos, se convierten en recursos útiles para que los estudiantes puedan modelar y resolver problemas. De este modo, se favorece el desarrollo de razonamiento matemático y se motiva al estudiante a enfrentarse a situaciones matemáticas nuevas (Shafer y Romberg, 1999).

2.4.3 Tareas de instrucción para promover el entendimiento

Para lograr el aprendizaje de cierto contenido matemático, inicialmente el docente o instructor, debe diseñar y plantear estrategias sencillas, considerando el uso de un lenguaje y símbolos accesibles para los estudiantes (Godino, Batanero y Font, 2004). Esto implica que las ideas matemáticas deben ser simplificadas, transformadas y presentadas de una forma simple, adaptadas a la edad y a los conocimientos previos que poseen los estudiantes. Las tareas de instrucción deben apoyar al estudiante a establecer relaciones entre diversos conceptos o ideas, y a favorecer la construcción de aprendizaje. Además, juegan un papel importante en el proceso de aprendizaje, debido a que son el elemento principal con el que cuenta el estudiante, para alcanzar un nivel de entendimiento matemático adecuado (Barrera y Reyes, 2016). Sin embargo, muchos docentes desconocen la importancia de diseñar, seleccionar e implementar las más apropiadas. Éstas deben ser pensadas con el propósito de fomentar el entendimiento y no solamente para familiarizar al estudiante con un algoritmo, proceso o para conducirlo a obtener un resultado.

Las tareas pueden ir desde colecciones de ejercicios simples, hasta tareas basadas en resolución de problemas. Casi cualquier tarea puede promover la comprensión, pero es necesaria la intervención del docente para su desarrollo (Carpenter y Lehrer, 1999). Asimismo, deben presentar de una manera clara, el principio matemático objetivo (en este caso la propiedad distributiva), sin añadir dificultades cognitivas innecesarias. Éstas pueden incluir preguntas y cuestionamientos profundos, que involucren la realización de comparaciones textuales y visuales, para facilitar la creación de relaciones entre ideas matemáticas (Ding y Li, 2014). Además, deben permitir al estudiante, involucrarse activamente en su desarrollo, y no solo prepararlos para recibir y memorizar conceptos o procedimientos, como tradicionalmente se hace en las aulas (Steen, 1989).

Para nuestro propósito, un contexto ideal para promover el desarrollo de pensamiento algebraico y funcional, que además puede favorecer el proceso de transición de lo concreto a lo abstracto, consiste en utilizar secuencias de representaciones concretas que tienen una regularidad o siguen cierta regla. En este tipo de tareas, el rol del estudiante consiste en identificar inicialmente, el modelo o patrón que sigue la secuencia. Enseguida, representar la generalidad mediante el uso de símbolos (Ding y Li, 2014) y, por último, hacer predicciones sobre las características del objeto o expresión, que ocupará un lugar determinado en la secuencia (Godino, Batanero y Font, 2004).

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1 Introducción

La metodología que se empleará para el desarrollo de esta investigación es de tipo cualitativo, ya que se centra en el análisis de los significados que los estudiantes asignan a los conceptos matemáticos, con base en las ideas que expresan verbalmente o por escrito. Bajo esta metodología, se hace énfasis en las relaciones y conexiones que realizarán para entender las ideas matemáticas. Este tipo de metodología generalmente se utiliza para dar respuesta a preguntas de investigación tales como: ¿qué está ocurriendo? ¿Por qué algo ocurre? ¿Cómo afecta un fenómeno a otros? (Borrego, Douglas y Amelink, 2009). Específicamente, buscamos identificar: ¿de qué manera las tareas que involucran generalizar patrones, utilizando modelos de área, pueden favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva?

3.2 Consideraciones iniciales

Según los resultados del Plan de Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA), aplicada en el 2016, el porcentaje nacional de alumnos de nivel medio superior que cuenta con las habilidades matemáticas para realizar procesos de reproducción, conexión y reflexión, con respecto a los contenidos que evalúa, es del 7.4% (Planea, 2016). Según el organismo encargado de realizar la evaluación, los resultados son un reflejo de múltiples factores tales como: las actividades escolares de los estudiantes (hábitos, actitudes y valores), las condiciones de las instituciones educativas y el contexto socioeconómico en el que viven.

Las instituciones de nivel medio superior regularmente aplican un examen de conocimientos a estudiantes de nuevo ingreso. En el Centro de Bachillerato Tecnológico y de Servicios Nº 218 la prueba de ingreso que se aplica es de tipo estandarizado y se realiza para todo el subsistema que conforma la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI). La prueba comprende dos partes fundamentales, una encargada de evaluar las habilidades de comprensión lectora y otra para evaluar las habilidades matemáticas. Para matemáticas, se plantean problemas y ejercicios que requieren del desarrollo de procesos aritméticos o algebraicos, principalmente. Los ejercicios de la prueba se seleccionan según los conocimientos que deben desarrollar en nivel secundaria. Los resultados de esta prueba, comparados con los obtenidos en Planea (2016), arrojan datos muy similares. Se puede identificar que un alto porcentaje de estudiantes, no cuentan con los conocimientos matemáticos básicos para el ingreso a este nivel educativo. Sin embargo, debido a la reforma educativa, se debe permitir el ingreso a todo estudiante que solicita una ficha de inscripción, independientemente de sus resultados.

3.3 Participantes

Las tareas de instrucción se implementaron en el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios nº 218, ubicado en la comunidad de Tlaxcoapan, en el estado de Hidalgo, en la región conocida como Valle del Mezquital. En esta región, la mayoría de la población es de clase social media-baja y las actividades económicas que prevalecen son: la agricultura, la ganadería y el comercio local, aunque actualmente, debido al establecimiento de zonas industriales, se ha incrementado la necesidad de mano de obra. Según los datos del INEGI (2015), aproximadamente el 20% de los estudiantes que terminan la educación básica no continúan con sus estudios, y de los que ingresan a nivel medio superior egresa el 64.2% en el estado de Hidalgo. En el municipio, el abandono escolar se atribuye principalmente a las características de la región, de la población y específicamente del contexto familiar, debido a que la mayoría de los estudiantes que abandonan la escuela tienen la necesidad de buscar empleo.

Para el desarrollo de este trabajo se eligió, a un grupo de 23 estudiantes de bachillerato, de entre 15 y 17 años, de los cuales 12 son hombres y el resto mujeres. El grupo de eligió debido a que la mayoría de los estudiantes del grupo muestra poco interés por el estudio en general, quizá debido a situaciones personales, al contexto social de la comunidad y a problemas económicos. De los 23 estudiantes, 20 han reprobado matemáticas al menos una vez, y los mismos argumentan su indiferencia ante el estudio y aprendizaje de la materia ya que consideran que es de poca utilidad e irrelevante para su vida personal.

3.4 Tareas y escenario de instrucción

Las tareas de instrucción se idearon y diseñaron a partir de los resultados de una actividad realizada con estudiantes de la asignatura de primer semestre del periodo anterior, perteneciente a su libro de Álgebra (Torres, 2015) y que consistía en factorizar un conjunto de productos de expresiones algebraicas. La tarea resultó compleja para los estudiantes y algunos incluso, perdieron el interés por realizarla. El problema era que los estudiantes no daban sentido al proceso de factorización; desconocían que los productos eran resultado de la multiplicación de dos o más expresiones algebraicas. Por esta razón, en aquel entonces, fue necesario presentar nuevamente la idea de la multiplicación de expresiones algebraicas y disipar algunas dudas. Sin embargo, se pudo observar que los estudiantes están acostumbrados a seguir algoritmos para llegar al resultado, sin razonar ni dar sentido a lo que hacen, ni permitir que se establezcan conexiones con otros temas o ideas matemáticos tales como el de propiedades de las operaciones.

Además, se identificó que la base para el entendimiento de la multiplicación de expresiones algebraicas, gira en torno al uso de la propiedad distributiva que es, en muchos casos, desconocida para los estudiantes. Por esta razón se consideró importante diseñar una tarea que favoreciera el entendimiento de la propiedad distributiva en estudiantes de nivel medio superior, para posteriormente utilizarla para el desarrollo de los productos notables, que no son más que casos de aplicación de la propiedad distributiva.

3.5 Descripción de las tareas de instrucción

Se diseñaron dos tareas divididas en tres fases cada una con el objetivo de conducir al estudiante a crear relaciones entre ideas de aritmética, geometría y álgebra para favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva. En cuanto a su estructura, ambas tareas incluyen secuencias figurales sobre las cuales los estudiantes deben obtener la expresión general que representa el área, tablas para apoyar al estudiante a registrar la información y cuestionamientos. Los cuestionamientos tienen la finalidad de centrar la atención del estudiante en la relación entre los datos y promover la reflexión y la comunicación de ideas.

Para finalizar la segunda tarea, se proponen algunos productos de expresiones algebraicas a través de los cuales, se busca verificar si el estudiante es capaz de utilizar la propiedad distributiva, apoyándose de modelos de área para realizar la expansión de tales productos.

El trabajo principal del estudiante consistirá en identificar patrones y relaciones entre las expresiones que representan las áreas y las medidas de las figuras y enseguida, generalizarlos.

Consideramos que, para hacer la transición de lo concreto a lo abstracto, o específicamente de aritmética a álgebra, es indispensable que los estudiantes se enfrenten primero, al análisis de casos particulares que incluyan elementos variantes e invariantes. Para apoyar al estudiante en el proceso de generalización, se propone un conjunto suficiente y representativo de casos particulares, en nuestro caso, secuencias figurales. El uso de figuras geométricas tiene el objetivo de apoyar al estudiante a dar un significado a los símbolos (letras), y favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

Otro aspecto que consideramos importante para favorecer el proceso de generalización, consiste en enfocar la atención del estudiante en la representación de las operaciones, por encima del cálculo de resultados. Por esta razón, se diseñaron e integraron un conjunto de tablas, con una estructura determinada, para familiarizar al estudiante con la representación de operaciones y al mismo tiempo, facilitar la identificación de las regularidades en estas representaciones. Por último, para favorecer el desarrollo de entendimiento, es necesario involucrar procesos de reflexión y comunicación de ideas. Consideramos que a través de la discusión entre estudiantes y entre estudiante-docente se pueden desarrollar estos procesos. Proponemos el desarrollo del trabajo en equipos con el fin ofrecer a los estudiantes la oportunidad de intercambiar ideas.

Tarea 1: Secuencia de cuadrados con incrementos a la base

La tarea uno consta de tres fases y está programada para una sesión de dos horas. Para cada fase de la secuencia, se proponen sucesiones de figuras sobre las cuales, los estudiantes deben obtener la expresión general que representa el área. Para facilitar la identificación de regularidades, se sugiere a los estudiantes representar el área de cada una de las figuras de dos maneras distintas: como producto de dos expresiones y como producto desarrollado. Como estrategia de apoyo para la obtención de la expresión general, se propuso analizar un determinado número de casos particulares sobre los cuales se espera que identifiquen lo variante e invariante.

En la primera fase, los casos particulares propuestos se presentan en una secuencia de cuadrados con medidas consecutivas (Fig. 3.1). El estudiante debe registrar en una tabla las medidas de cada elemento en la secuencia y las expresiones correspondientes a las áreas.

Mediante esto se pretende centrar su atención en la representación de operaciones y no en el resultado y, además, facilitar la identificación de la relación entre las expresiones que representan el área de la figura. Para apoyar al proceso de generalización, se solicita a los estudiantes considerar otras figuras de la secuencia. Por ejemplo, las figuras 10, 40 y 100. Se espera que el estudiante analice los casos particulares y a partir de la identificación de lo variante e invariante, construya relaciones, reconozca patrones y los generalice. Para esta situación, se espera que obtenga y de sentido a la igualdad $(x)(x) = (x^2)$.

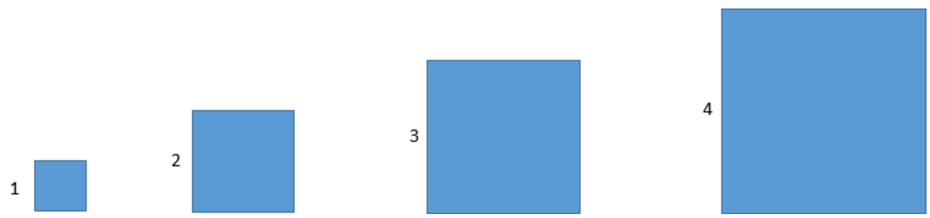


Figura	Altura	Base	Área	
			(Altura)(Base)	Representada como exponente
1	1	1		
2	2			
3	3			
4	4			

Fig. 3.1. Secuencia de cuadrados inicial y tabla propuesta el registro de datos.

En la segunda fase, se propusieron cuatro secuencias de figuras construidas a partir de la secuencia inicial. Las nuevas secuencias incluían un incremento en la longitud de la base de 1, 3, 6 y *y* unidades, respectivamente. Cada figura estaba dividida en dos sub-figuras, un cuadrado y un rectángulo (Fig. 3.2). El estudiante debía identificar y analizar los cambios en las figuras, medidas y representar las áreas. Para conducir al estudiante a la identificación de relaciones entre los datos, se plantearon cuestionamientos guía. Algunos hacían referencia a nuevas figuras sobre la secuencia. Por ejemplo, ¿cuáles serían las dimensiones y el área de la figura 10?, y ¿cuáles serían las dimensiones de las figuras 45 y 150? Otros se plantearon para relacionar ideas como, por ejemplo, ¿qué relación existe entre las áreas que se obtuvieron en la fase 1 y la fase 2? ¿Cómo son las expresiones que representan el área? Las expresiones que se espera sean construidas para las tres primeras secuencias, son $(x)(x+1) = (x)(x) + (x)(1)$, $(x)(x+3) = (x)(x)+ (x)(3)$, $(x)(x+6) = (x)(x)+(x)(6)$.

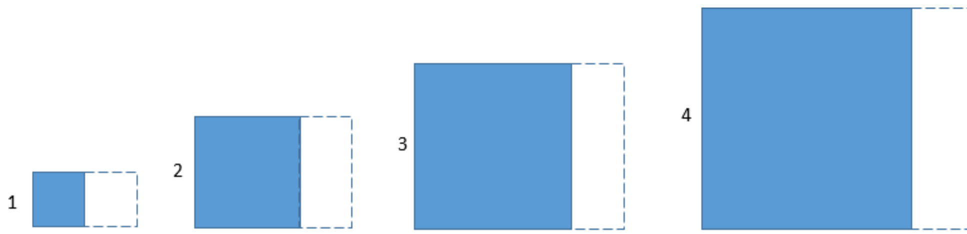


Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes		Total (Sombreada + aumento)
					Parte Sombreada	Parte que aumento	
1	1	1	+ 1	(1)(1+1)	(1)(1)	(1)(1)	
2			+ 1				
3			+ 1				
4			+ 1				

Fig. 3.2 Secuencia de cuadrados con incrementos a la base y tabla para el registro de información.

En la última secuencia de la fase tres, se propuso al estudiante realizar un incremento general y, a la longitud de la base de las figuras en la secuencia. Se esperaba que con apoyo de los casos anteriores llegase a la generalización del caso $(x)(x+y) = (x)(x) + (x)(y)$.

Tarea 2: Secuencia inicial de cuadrados con incrementos iguales a la base y a la altura

Esta tarea está compuesta de tres fases y se llevó a cabo en una sesión de dos horas. En la primera fase se solicitó al estudiante construir una secuencia de cuadrados con longitudes de dos, cuatro, seis y ocho unidades. Posteriormente se propuso realizar modificaciones sobre las figuras, incrementando un centímetro a la longitud de la base y la altura de manera simultánea, y marcar las regiones que se formaban con el incremento (Fig. 3.3).

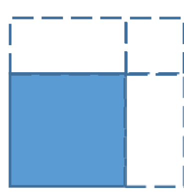


Fig. 3.3. Ejemplo de figura de la secuencia.

Para enfocar la atención del estudiante en las regiones que surgían con la modificación de las medidas, se lanzó el cuestionamiento, ¿cómo calcularías el área únicamente de la región que se incrementó? y se dio un tiempo para que los estudiantes pudiesen responder. Posteriormente, se solicitó obtener las áreas de las figuras en la secuencia y registrar los datos.

Al igual que en la fase anterior, se solicitó al estudiante expresar el área de dos maneras distintas, para este caso, representando el producto y desarrollándolo. Se espera que los estudiantes identifiquen los cambios en la secuencia, las medidas y la expresión que representa el área, para facilitar la obtención de la expresión general $(x+1)(x+1) = (x)(\mathrm{x})+(\mathrm{x})(1)+(\mathrm{x})(1)+(1)(1)$. Enseguida, como un nuevo caso, se pidió al estudiante obtener las expresiones que representan el área de una secuencia de figuras, con aumentos de dos centímetros a sus lados, en vez de uno. Se esperaba que el estudiante, con base en los casos y situaciones anteriores, identificara los cambios sufría la estructura de las operaciones y la expresión general, en función de las medidas de sus lados.

Para finalizar, se propusieron casos adicionales en los que el estudiante debía obtener únicamente las expresiones generales, suponiendo que se realizan incrementos de 10, 20 y 100 unidades a la base y a la altura de la secuencia de cuadrados inicial. El desarrollo de esta fase, tiene como objetivo guiar al estudiante para dar sentido y obtener el caso $(x+y)(x+y) = (x)(x)+(x)(y)+(x)(y)+(y)(y)$.

Para la segunda y la tercera fase se propusieron los siguientes productos de binomios:

Segunda Fase	Tercera Fase
$(2)(2+3)$	$(x)(x+3)$
$(5)(5+8)$	$(x+2)(x+2)$
$(2+3)(2+3)$	$(x+6)(x+6)$
$(3+5)(3+5)$	
$(x+3)(x+3)$	

Se sugirió considerar que los factores correspondían a las medidas de una figura. Se esperaba que los estudiantes se apoyaran de las estrategias desarrolladas en las etapas anteriores para poder obtener los productos. En el caso particular de la última etapa, los ejercicios corresponden a productos de binomios cuyo resultado se puede obtener, a partir del uso de la propiedad distributiva y modelos de área.

3.6 Implementación de las tareas

Inicialmente se realizó una prueba piloto de la tarea con un grupo de estudiantes, distinto al grupo con el que se realizó la prueba principal, para identificar algunos detalles que pudiesen dificultar el entendimiento y desarrollo de las actividades. La prueba piloto arrojó que las tareas presentaban ciertos inconvenientes con respecto al planteamiento de las instrucciones y a la falta de precisión para conducir a los estudiantes a centrar su atención en la representación de operaciones. Razón por la que la tarea de instrucción se modificó, de tal manera que las instrucciones se presentaran de manera clara y precisa, para no añadir dificultades cognitivas innecesarias. También se incluyeron una serie de preguntas y tablas, para enfocar la atención de los estudiantes en la estructura de las operaciones y facilitar el reconocimiento de lo variable y lo invariante. Lo anterior para favorecer la transición de operaciones aritméticas a expresiones algebraicas a través de la generalización de patrones.

La prueba final se realizó durante dos sesiones de clase con duración de dos horas cada sesión. Para la implementación de las tareas, se dividió al grupo en equipos de trabajo de entre cuatro y cinco estudiantes, con el propósito de promover la discusión y la reflexión de ideas. Para el desarrollo de la tarea, se entregó a los estudiantes un juego de hojas de trabajo. El rol del instructor consistió en apoyar a los estudiantes para poder llevar a cabo la tarea, principalmente al identificar lo variable y lo invariante en las secuencias figurales, a través del planteamiento de nuevas preguntas o ejemplos más simples que les permitieran centrar o enfocar su atención en determinados elementos o aspectos relevantes de la tarea.

3.7 Recolección de la información y análisis de datos

Se realizó la recopilación de datos cualitativos, tales como, observaciones del docente, grabaciones de audio sobre el desarrollo de la tarea y las discusiones sobre ella. También se utilizaron las hojas de trabajo, como herramienta para identificar los inconvenientes, dificultades y logros de los estudiantes. Al finalizar cada tarea se pidió a los estudiantes no corregir ni modificar los resultados, aún después de la retroalimentación del instructor. De igual forma, para fines de la investigación, se solicitó a cada equipo realizar la grabación de audio de lo ocurrido durante el desarrollo de la tarea, mediante el uso de un teléfono celular. Sin embargo, no todos los equipos la realizaron debido a que no le dieron importancia al desarrollo de la actividad. Las intervenciones grabadas se transcribieron para posteriormente, junto con los datos recopilados en las hojas de trabajo, realizar el análisis (Ver apéndice B y C).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Se implementaron dos tareas que involucran modelos de área y el principio de aditividad, con la finalidad de conocer, cómo éstas pueden apoyar a los estudiantes a entender la propiedad distributiva. Las tareas se llevaron a cabo durante dos sesiones de clase, de dos horas cada una, en las cuales se integraron cinco equipos (A, B, C, D y E), de máximo cinco integrantes. Previo a la implementación de las tareas, se informó a los estudiantes que el objetivo que se perseguía era favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva y posteriormente se les entregó una hoja de trabajo (Ver apéndice A).

Cada tarea se implementó en tres fases. En la mayoría de éstas, los estudiantes debían analizar secuencias de figuras y obtener una expresión general que representaría el área de cualquier figura en la secuencia, en función de las longitudes de sus lados. Para cada fase, se propuso una secuencia de figuras distinta, representando cada una, un caso de la propiedad distributiva. La primera secuencia consistía en cuadrados con medidas consecutivas. Para la segunda fase, se incrementó la longitud de la base de cada cuadrado, para formar rectángulos. Estos rectángulos se dividieron en dos regiones, una cuadrada, igual a la secuencia de figuras inicial y otra rectangular, con la misma altura del cuadrado y una unidad como base. Se solicitó a los estudiantes obtener el área de los rectángulos de dos maneras diferentes, para después generalizar las operaciones aritméticas involucradas y conducirlo a identificar la igualdad $x(x+1) = x^2 + x$. Posteriormente se les pidió analizar otras dos secuencias en las cuales, las bases de los cuadrados de la secuencia original se aumentaron tres y seis centímetros, respectivamente. El propósito fue que generalizaran los siguientes casos particulares de la propiedad distributiva $x(x+3) = x^2+3x$, y $x(x+6) = x^2+6x$, relacionando cada expresión algebraica con las áreas correspondientes.

La tercera fase consistió en incrementar, de forma general, la base de la figura para conocer de qué manera los estudiantes interpretaban un aumento representado por una literal. Se buscó que al desarrollar las actividades anteriores los estudiantes pudiesen llegar a obtener la expresión $x(x+y) = x^2 + xy$ y a identificar que ambas expresiones son equivalentes y que en este caso $x(x+y)$ representa el área de la figura total (base por altura), y que la expresión

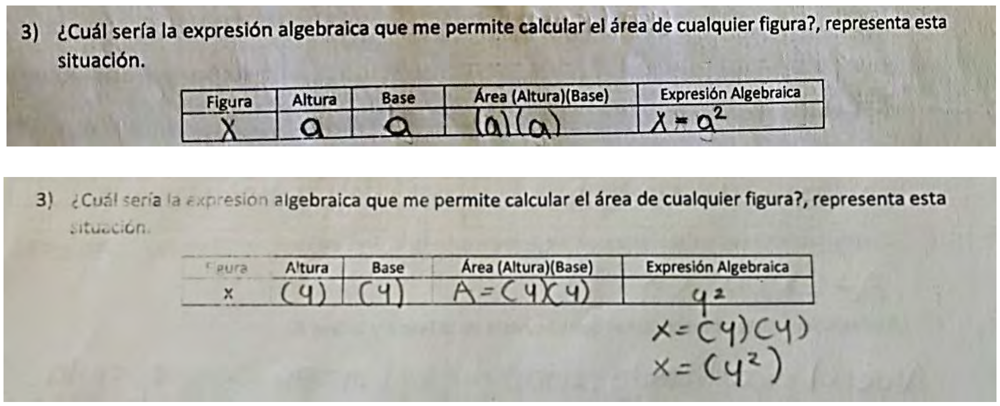
x^2+xy representa la misma área, pero calculada como la suma de las áreas de las dos sub-figuras en que se divide el rectángulo mayor (propiedad aditiva del área).

En la segunda actividad, se proporcionó a los estudiantes únicamente el elemento inicial de la secuencia y se solicitó que construyera otros casos particulares de ésta para identificar si podía extender o transferir lo realizado en la actividad previa. La figura inicial consistió de un cuadrado con incrementos de una unidad, tanto en la base como en la altura. Enseguida, se pidió al estudiante aumentar la base y la altura en dos, seis, diez, veinte y cien unidades, y determinara la expresión que representa el área. El objetivo final de la primera fase fue que los estudiantes generalizaran y dieran sentido a la equivalencia $(x+y)(x+y) = x^2+2xy+y^2$.

En las siguientes fases de la tarea dos, se propuso a los estudiantes un conjunto de productos entre sumas de dos números y después, productos de dos binomios. El objetivo era identificar si eran capaces de extender lo realizado en las tareas previas y determinar si esas tareas apoyaron la comprensión de la propiedad distributiva. En cada una de las fases, las hojas de trabajo incluyeron tablas donde los estudiantes debían registrar las operaciones y resultados, así como una serie de preguntas orientadas a centrar la atención de los estudiantes en ciertas relaciones entre los datos. Las tablas se diseñaron para que los estudiantes centraran su atención en las operaciones y no solo en los resultados.

Tarea 1: Secuencia inicial de cuadrados e incrementos en la base

Los estudiantes, en general, no presentaron dificultades para abordar la primera fase de esta tarea. Sin embargo, los equipos C y D tuvieron problemas para identificar la relación que existe entre la posición de una figura en la secuencia y las medidas de sus lados. Por ejemplo, al considerar la figura en la posición x asignaron a la medida de la base el símbolo y en el caso del equipo C, y a en el caso del equipo D. El símbolo sería el correcto si tuviésemos un cuadrado cuya longitud de sus lados fuese y o a, pero para este caso, los estudiantes no relacionaron la posición de la figura con las medidas. Esta situación, llevó a que como generalización del área obtuvieran y^2 y a^2 respectivamente, que implica que no dieron sentido a los símbolos. Como expresión que generaliza el área de un cuadrado en la posición x, utilizaron las igualdades $x = y^2$ y $x = a^2$ que no tienen sentido. Sí x representa el número de la figura, debía representar también la longitud de la base y de la altura (Fig. 4.1).



3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura?, representa esta situación.

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Expresión Algebraica
X	a	a	(a)(a)	X = a²

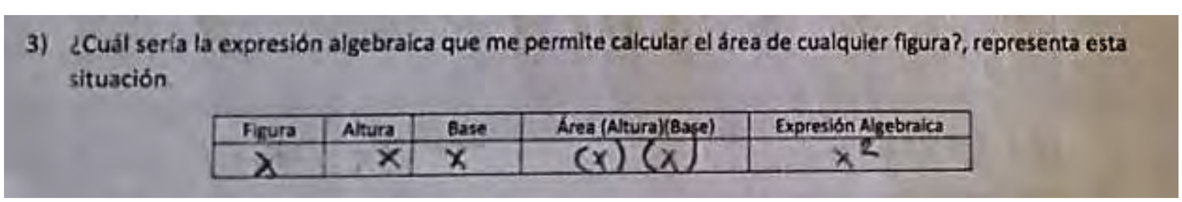
3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura?, representa esta situación.

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Expresión Algebraica
x	(y)	(y)	A = (y)(y)	y²

x = (y)(y)
x = (y²)

Fig. 4.1. Falta de algunas relaciones entre expresiones simbólicas y representaciones geométricas

Los estudiantes no tuvieron dificultades para llenar las tablas. Sin embargo, cuando se les pidió generalizar el patrón, experimentaron conflictos para realizar todas las conexiones necesarias entre los datos. Por ejemplo, utilizaron diferentes símbolos (literales), para representar el número de figura y las medidas, cuando tendría que ser el mismo, lo que nos permitió observar que tienen problemas para identificar y expresar todas las relaciones involucradas en el problema (Fig. 4.1). Por otro lado, los equipos A, B y E lograron reconocer que las medidas de la base y la altura eran iguales al número de la figura en la secuencia. Identificaron que la expresión algebraica que representaba el área de las figuras, podía obtenerse al elevar al cuadrado la longitud de un lado, tal y como se realizó con los casos particulares (Fig. 4.2). Si el número de la figura se representaba con la literal x (o a), el área del cuadrado se expresaba como x^2 (a^2).



3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura?, representa esta situación.

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Expresión Algebraica
x	x	x	(x) (x)	x²

Fig. 4.2. Expresión algebraica que generaliza el área de un cuadrado de lado x.

Para la segunda fase de la actividad, se modificó la secuencia de figuras inicial, conservando la medida de la altura y aumentando un centímetro a la base de cada figura. Al igual que en la primera fase, se propusieron casos particulares consecutivos y no consecutivos. Algunos equipos coincidieron en pensar que el área total se podía obtener a partir de la suma de las áreas de las regiones en las que se dividía la figura. Otros, adicionaron la longitud original de la base al aumento y lo multiplicaron por la altura. Por ejemplo, si la base de la figura tenía una longitud de dos centímetros, con el aumento, la base de la figura completa sería de tres centímetros y la altura de dos, por lo que, para obtener el área, solo multiplicaron base por altura. El equipo D utilizó esta estrategia, multiplicó tres por dos para obtener el área. Por otro lado, el equipo B, calculó las áreas de las regiones por separado para posteriormente sumarlas, pero sin dar importancia a la representación de operaciones que se había sugerido.

En la hoja de trabajo se sugería a los estudiantes obtener el área de cada sub-figura como el producto de dos números y después representar la suma de ambas, para obtener el área total. Esto se hizo con la finalidad de centrar la atención de los estudiantes en las operaciones entre números y no en los resultados. Sin embargo, los equipos B y D no atendieron la sugerencia, lo que les ocasionó dificultades para generalizar los patrones que se buscaban. El equipo B tardó en identificar la relación entre el número de la figura y el área, mientras que el equipo D propuso como expresión para obtener el área $x = a(b+1)$ (Fig. 4.3). En esta expresión se observa que los estudiantes no establecieron todas las relaciones necesarias entre las expresiones algebraicas, sustentadas en las relaciones geométricas. Si a representa el número de figura, a debe ser por lo tanto la medida de la altura y la longitud de la base debería estar dada por el número de la figura más uno, es decir $a+1$. La expresión $a(a+1)$ es en este caso la representación de la operación para obtener el área mientras que $a^2 + a$ representa el área del rectángulo mayor.

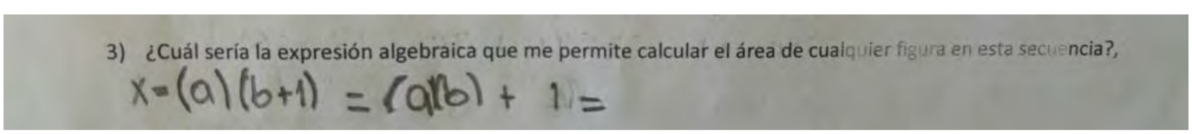


Fig. 4.3. Forma de expresión simbólica que no captura relaciones relevantes.

En el caso de los equipos que siguieron las indicaciones de las hojas de trabajo, el proceso de generalización resultó sencillo. Identificaron las relaciones geométricas y numéricas y las expresaron simbólicamente, a partir del análisis de los casos particulares. Centrar la atención del estudiante en las operaciones entre números, les permitió enfocarse en aquello que cambia y en aquello que permanece invariante con mayor facilidad. Además, esto permitió que los estudiantes distinguieran los elementos que cambiaban en la secuencia y con ello lograron la generalización de este caso particular de la propiedad distributiva $x(x+1) = x^2 + x$.

Una segunda y tercera modificaciones a la tarea inicial, consistieron en incrementar las medidas de la base del cuadrado en tres y seis unidades, obteniéndose una secuencia de rectángulos. El equipo E resolvió de forma adecuada la tarea. Centró su atención en las operaciones y las relaciones entre ellas, lo que le permitió generalizar sin dificultad, obteniendo los siguientes casos particulares de la propiedad distributiva: $x(x+3) = x^2+3x$ y $x(x+6) = x^2+6x$, respectivamente (Fig. 4.4).

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes		Total (Sombreada + aumento)
					Parte Sombreada	Parte que aumento	
1	1	1	+ 3	(1) (1+3)	(1) (1)	(1) (3)	(1^2) + (1) (3)
2	2	2	+ 3	(2) (2+3)	(2) (2)	(2) (3)	(2^2) + (2) (3)
3	3	3	+ 3	(3) (3+3)	(3) (3)	(3) (3)	(3^2) + (3) (3)
x	x	x	+ 3	(x) (x+3)	(x) (x)	(x) (3)	(x^2) + 3x

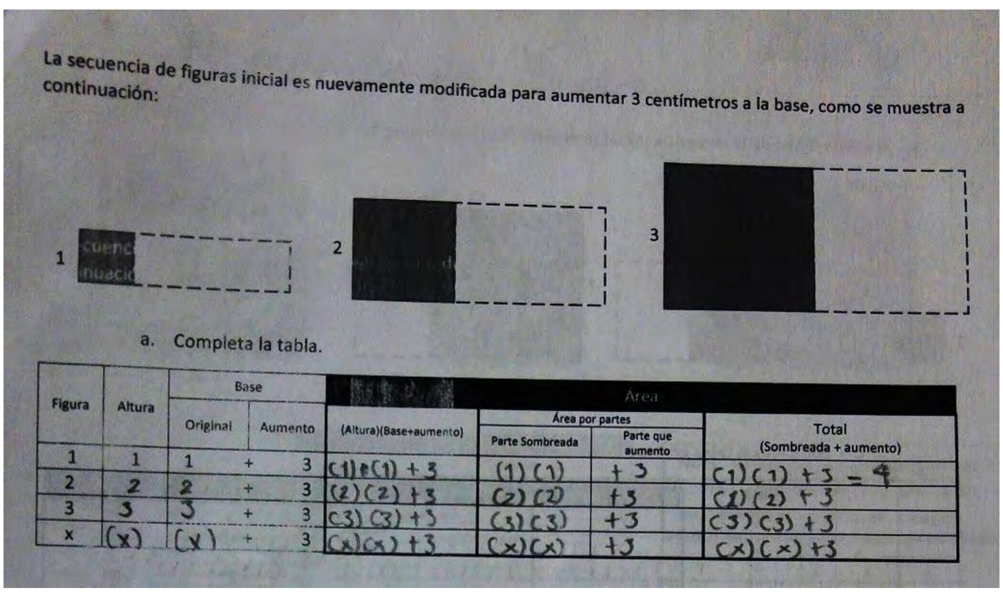
Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes		Total (Sombreada + aumento)
					Parte Sombreada	Parte que aumento	
1	1	1	+ 6	(1) (1+6)	(1) (1)	(1) (6)	(1^2) + (1) (6)
2	2	2	+ 6	(2) (2+6)	(2) (2)	(2) (6)	(2^2) + (2) (6)
3	3	3	+ 6	(3) (3+6)	(3) (3)	(3) (6)	(3^2) + (3) (6)
x	x	x	+ 6	(x) (x+6)	(x) (x)	(x) (6)	x^2 + 6x

Fig. 4.4. Generalización de los casos $x(x+3)$ y $x(x+6)$ a partir del análisis de patrones.

El equipo B no siguió la indicación de representar las operaciones. En vez de ello, se centraron únicamente en las figuras y para obtener las áreas correspondientes utilizaron la fórmula base por altura. Calcularon las áreas de las dos regiones en las que estaba dividida y posteriormente realizaron la suma para obtener el área total. Por ejemplo, para la figura en la posición x (cuya altura era x y base $x+3$), calcularon el área del cuadrado (x por x) y después la sumaron al área del rectángulo pequeño (3x), obteniendo como área total $x^2 + 3x$, que es correcto para este caso. Sin embargo, la expresión no se obtuvo a partir del análisis de los patrones en las operaciones, sino realizando una operación algebraica desde el inicio.

El equipo D se centró en la figura total y aplicó su conocimiento para calcular el área de los rectángulos y obtener el área total de la figura centrándose en calcular un resultado y para obtener el área de la figura x aplicaron el mismo procedimiento que el equipo B.

Los equipos A y C, observaron que el área de la primera figura de la secuencia, con base (1+3) y altura uno, se podía obtener a través de la operación (1)(1) + 3 = 4, que es correcto. Sin embargo, al centrar su atención únicamente en el resultado y no representar la operación para calcular el área, pensaron erróneamente que éste segundo sumando sería el mismo para todos los elementos restantes de la secuencia. El mismo error, lo cometieron con la siguiente secuencia de figuras. Para cada una de las figuras en la secuencia realizaron un aumento constante de tres y seis unidades respectivamente. Como generalización obtuvieron las igualdades (x)(x+3) = (x)(x)+3 y (x)(x+6) = (x)(x)+6, que son incorrectas (Fig. 4.5).


La secuencia de figuras inicial es nuevamente modificada para aumentar 3 centímetros a la base, como se muestra a continuación:

1 2 3

a. Completa la tabla.

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes		Total (Sombreada + aumento)
					Parte Sombreada	Parte que aumento	
1	1	1 +	3	(1)•(1) + 3	(1) (1)	+ 3	(1) (1) + 3 = 4
2	2	2 +	3	(2) (2) + 3	(2) (2)	+ 3	(2) (2) + 3
3	3	3 +	3	(3) (3) + 3	(3) (3)	+ 3	(3) (3) + 3
x	(x)	(x) +	3	(x)(x) + 3	(x)(x)	+ 3	(x) (x) + 3

Fig. 4.5. Generalización incorrecta debida a la falta de atención en las operaciones.

En la tercera fase de la tarea se indicó a los equipos que agregaran un incremento general y a la base de la secuencia inicial de cuadrados. Los equipos D y E lograron identificar que el área total estaría dividida nuevamente en dos regiones, una de las cuales era un cuadrado cuya longitud de la base y altura era igual al número de figura y la segunda sub-figura, un rectángulo con altura igual a la posición de la figura y con una base de *y* unidades. Hasta este punto los estudiantes de ambos equipos encontraron que el aumento en el área dependía de la longitud de la base y que la altura era igual al número de figura, del mismo modo que en las secuencias analizadas previamente.

El equipo A y el equipo B cometieron el error de analizar únicamente el caso inicial y generalizar de forma incorrecta el área de la subregión rectangular (Fig. 4.6). En el primer caso particular el área la calcularon como $(1)(1) + y$. En los siguientes casos no identificaron que el área del rectángulo pequeño también cambiaba y escribieron el área de la figura en la posición x-ésima como $x^2 + y$.

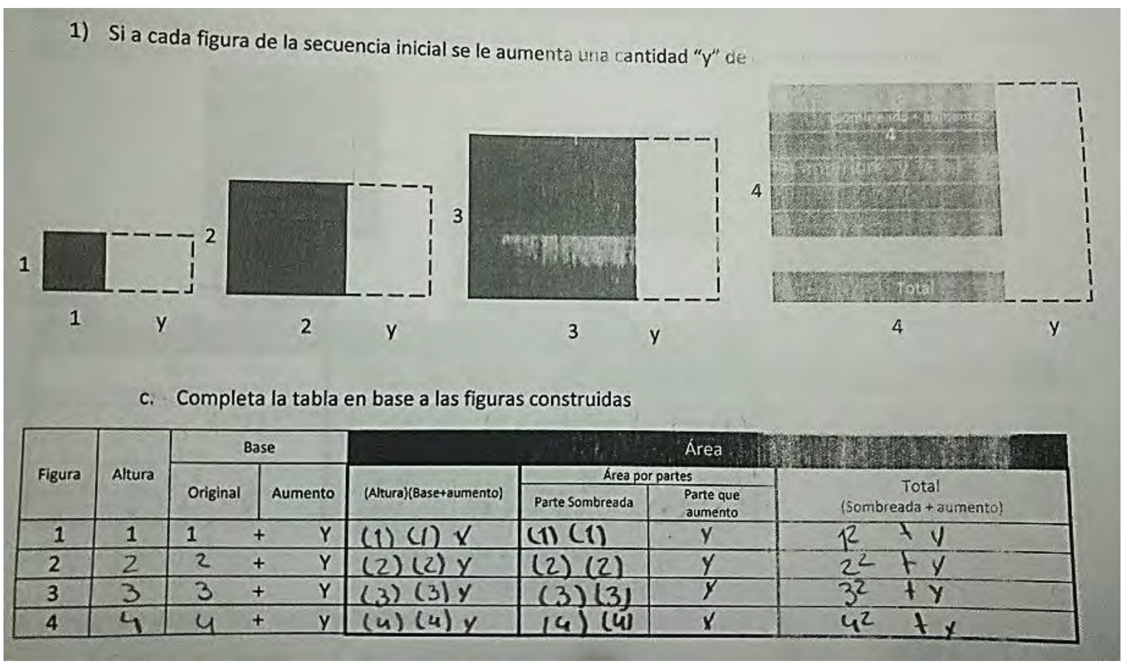


Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes		Total (Sombreada + aumento)
					Parte Sombreada	Parte que aumento	
1	1	1 +	Y	(1) (1) y	(1) (1)	y	$1^2 + y$
2	2	2 +	Y	(2) (2) y	(2) (2)	y	$2^2 + y$
3	3	3 +	Y	(3) (3) y	(3) (3)	y	$3^2 + y$
4	4	4 +	y	(4) (4) y	(4) (4)	y	$4^2 + y$

Fig. 4.6. Generalización errónea resultado del análisis de un solo caso.

El equipo C enfrentó dificultades para interpretar el aumento de *y* unidades. Los estudiantes de este equipo consideraron que el incremento de *y* unidades representaba un aumento desconocido y para dar solución a esta situación asignaron un valor a la literal, en este caso de 1 (Fig. 4.7).

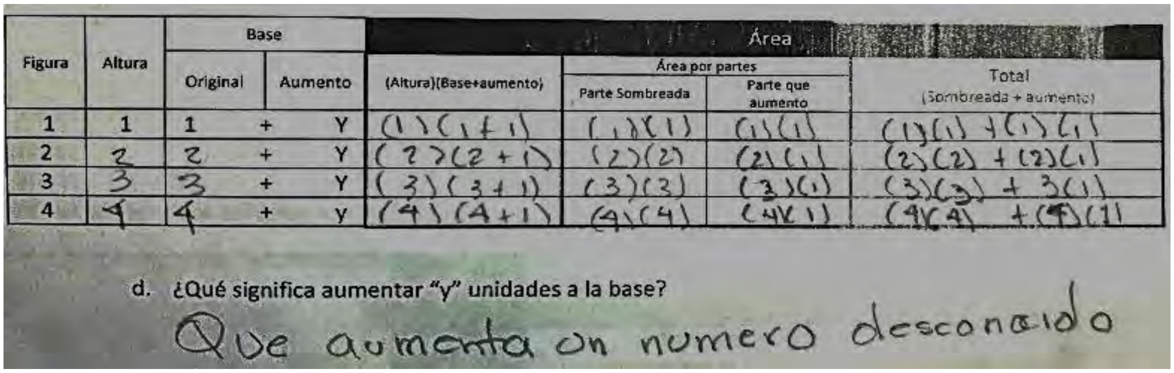


Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1 +	Y	(1)(1+1)	(1)(1)	(1)(1)	(1)(1) + (1)(1)
2	2	2 +	Y	(2)(2+1)	(2)(2)	(2)(1)	(2)(2) + (2)(1)
3	3	3 +	Y	(3)(3+1)	(3)(3)	(3)(1)	(3)(3) + 3(1)
4	4	4 +	y	(4)(4+1)	(4)(4)	(4)(1)	(4)(4) + (4)(1)

d. ¿Qué significa aumentar "y" unidades a la base?

Que aumenta un numero desconocido

Fig. 4.7. Conceptualización de la variable como un valor inicialmente desconocido.

Los equipos D y E representaron las operaciones, lo que facilitó el proceso de generalización a partir del análisis de los patrones presentes en la secuencia de figuras y en la representación de la operación para obtener el área. Al igual que el equipo C, el quipo D representó el área de la figura únicamente como base por altura. Es decir, únicamente expresaron el área con la expresión $(x)(x+y)$. *Analizar la propiedad distributiva implica que los estudiantes puedan obtener o calcular el área de la misma figura de dos maneras diferentes para después identificar que ambas expresiones son equivalentes.*

Dentro de la tarea propuesta se incluyó una pregunta para identificar qué significado tiene para ellos una literal, encontrando que una literal representa o una variable o una incógnita. Con la pregunta también se pretendía lograr que los estudiantes relacionaran la secuencia de figuras y las diferentes formas de representar el área, inicialmente como producto y posteriormente como la expansión del producto. Sin embargo, la mayoría de los equipos respondió los cuestionamientos solo por contestar

Antes de concluir la tarea uno, el instructor realizó una retroalimentación. Se indicó a cada equipo en qué situaciones habían cometido un error. En el caso de aquellos equipos con problemas para obtener la expresión general, se propusieron casos particulares más sencillos, a fin de apoyarlos a conceptualizar a las literales como variables. Pero, para fines de la investigación, se solicitó a los estudiantes que no modificaran ni borraran los resultados registrados en las hojas de trabajo a fin de identificar las dificultades a las que se enfrentaron y que surgieron durante el desarrollo de la actividad.

Tarea 2: Secuencia inicial de cuadrados con incrementos iguales en la base y en la altura

Se propuso una figura cuadrada con longitud de dos unidades de alto y dos de base, incrementada una unidad en ambos lados, lo que dio lugar a cuatro regiones, dos de las cuales eran cuadradas y dos rectangulares (Fig. 4.8), y se solicitó al estudiante que construyera otras figuras de la secuencia. En esta ocasión no se propusieron medidas secuenciales, sino longitudes pares y se esperaba que el estudiante comprendiera que sin importar las medidas, el proceso para generalizar era igual al de la actividad anterior y que el análisis de casos particulares era el medio para conducirlos al caso general.

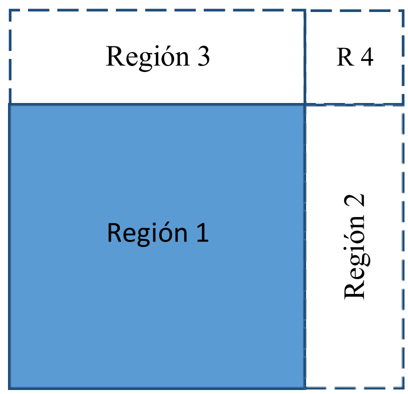


Fig.4.8. Regiones en las que se dividía un cuadrado con aumentos en la base y la altura.

Se esperaba que los estudiantes identificaran que el área total se podía obtener sumando las áreas de las cuatro regiones. Para centrar su atención en las áreas de las regiones, se cuestionó a los equipos con respecto a la estrategia que utilizarían para calcular el área de cada una de ellas.

El equipo A se centró únicamente en la primera figura de la secuencia. El equipo, observó que las medidas de la primera figura eran de (2+1) y obtuvo el área total mediante la suma de las áreas de las sub-figuras como (2)(2) + (2)(2)(1) + (1)(1). Enseguida, simplificaron la representación como $2^2+2^2+1^2$. Relacionaron al primer término $2^2 = 4$ con el área de la región 1 y a los términos $2^2 + 1^2 = 5$ con las áreas de las regiones 2, 3 y 4. Conjeturando que el número dos correspondía a las medidas de la región 1 y la unidad al aumento. El equipo se centró en este caso particular y extendió esta idea a los siguientes casos. Posteriormente, al no tener elementos para establecer la expresión general para el caso propuesto el equipo representó el área únicamente como $(x+1)^2$, pero no lograron la expansión de la expresión (Fig. 4.9).

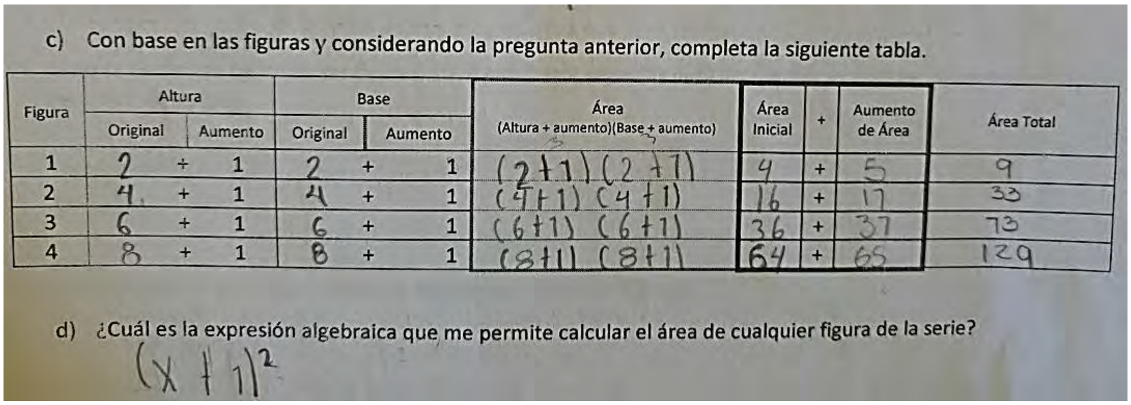

c) Con base en las figuras y considerando la pregunta anterior, completa la siguiente tabla.

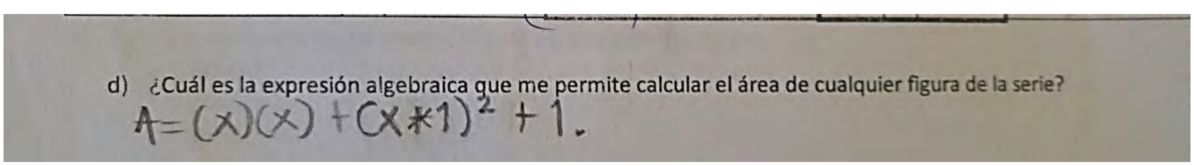
Figura	Altura Original	Altura Aumento	Base Original	Base Aumento	Área (Altura + aumento)(Base + aumento)	Área Inicial	+	Aumento de Área	Área Total
1	2 +	1	2 +	1	(2+1)(2+1)	4	+	5	9
2	4 +	1	4 +	1	(4+1)(4+1)	16	+	17	33
3	6 +	1	6 +	1	(6+1)(6+1)	36	+	37	73
4	8 +	1	8 +	1	(8+1)(8+1)	64	+	65	129

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la serie?

$(x+1)^2$

Fig. 4.9. Extensión de una conjetura con base en un solo caso particular.

Los equipos B, C y E, relacionaron la secuencia de figuras actual con las anteriores, lo que permitió a los equipos B y C centrar su atención en el área de las regiones que se generaban con el incremento a la base y a la altura. Para obtener el área de las regiones rectangulares, duplicaron el área de uno de los rectángulos, posteriormente sumaron una unidad para obtener el área de las sub-regiones 2, 3 y 4. El equipo B representó el área de estas regiones mediante la operación 2(2*1) + 1 = 5, mientras que el equipo C con $(2*1)^2 + (1)(1) = 5$. El resultado de ambas operaciones coincide, pero el equipo C, representó de manera errónea la operación. Ninguno de estos equipos representó las operaciones, centraron su atención únicamente en el caso inicial. Para el caso general de la secuencia, el equipo C obtuvo la expresión $(x)(x)+(x*1)^2+1$, mientras que el equipo B no consiguió identificar ninguna relación (Fig. 4.10).


d) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la serie?

$A=(x)(x)+(x*1)^2+1.$

Fig. 4.10. Expresión que representa el área de un cuadrado de medidas (x+1) obtenida por el equipo B.

El equipo D, para obtener el área total de las figuras, realizó un incremento constante al área de la primera región de cada figura para obtener el área total. Centró su atención únicamente en la primera figura de la secuencia. Por otro lado, los equipos A y D únicamente representaron la multiplicación de la base y altura de las figuras. El equipo E logró relacionar la tarea con las anteriores e identificó la importancia de representar las operaciones. Esto facilitó la observación de relaciones y la generalización de patrones (Fig. 4.11). Los estudiantes expandieron de forma correcta la expresión $(x+1)(x+1) = x^2 + (x)(1) + (x)(1) + 1^2 = x^2 + 2(x)(1) + 1^2$. Sin embargo, esta expresión no tiene relación con la secuencia de figuras, porque a diferencia de los casos anteriores, el número de la figura no coincide con la base y altura. No obstante, al hacer la observación al equipo, lograron corregir la expresión.

Figura	Altura			Base			Área (Altura + aumento)(Base + aumento)	Área Inicial	+	Aumento de Área	Área Total
	Original		Aumento	Original		Aumento					
1	2	+	1	2	+	1	(2+1) (2+1)		+		$(2)^2+(2)(1)+(2)(1)+1^2$
2	4	+	1	4	+	1	(4+1) (4+1)		+		$(4)^2+(4)(1)+(4)(1)+1^2$
3	6	+	1	6	+	1	(6+1) (6+1)		+		$(6)^2+(6)(1)+(6)(1)+1^2$
4	8	+	1	8	+	1	(8+1) (8+1)		+		$(8)^2+(8)(1)+(8)(1)+1^2$

Fig. 4.11. Expansión de la operación que representa el área de las figuras en la secuencia.

A continuación, se solicitó a los estudiantes agregar incrementos iguales a la base y la altura de manera simultánea y obtener las expresiones que representan el área. El equipo E se apoyó de la construcción de figuras y la representación de operaciones para llegar a la generalización. El equipo B únicamente obtuvo representación del área expresada como el producto de la base por la altura. Los equipos D y A solo llegaron a identificar que el área se podía representar cómo (*longitud inicial* + *aumento*)^2, pero no expandir la expresión, mientras que el equipo C no pudo generalizar. Uno de los factores que influyó para que algunos equipos no consiguieran obtener las expresiones que representan el área fue que no realizaron las figuras correspondientes, lo que no permitió que identificaran las relaciones entre las longitudes y las áreas. Para concluir con la fase se solicitó a los estudiantes obtener las expresiones que representan el área de un cuadrado de lado $(x + y)$. La mayoría de los equipos solo representó el área de una forma, es decir, $(x + y)^2$. El equipo E fue el único que logró obtener la igualdad $(x+y)(x+y) = (x+y)^2 = (x)(x) + (x)(y) + (x)(y) + (y)(y) = x^2+ 2xy + y^2$.

Para la fase siguiente se les propusieron expresiones del tipo (2)(2+3), (2+3)(2+3), (x+3)(x+3), indicando a los estudiantes que los factores representaban las longitudes de figuras rectangulares. Con esta consideración, debían obtener una expresión que represente entonces, el área de la figura. Para obtener la expresión de los casos particulares propuestos, los equipos B, C y D, realizaron la operación de base por altura, mientras que, para el caso general, aunque construyeron la figura, no lograron identificar las relaciones y obtener el área por partes. Los estudiantes representaron las figuras, pero únicamente obtuvieron los resultados numéricos de las áreas, sin establecer la equivalencia entre los productos y su expansión. Esto pudo deberse a la falta de precisión en las indicaciones de la tarea dado que se solicitó que obtuvieran el área y no que expresaran el área de una manera equivalente (Fig. 4.12).

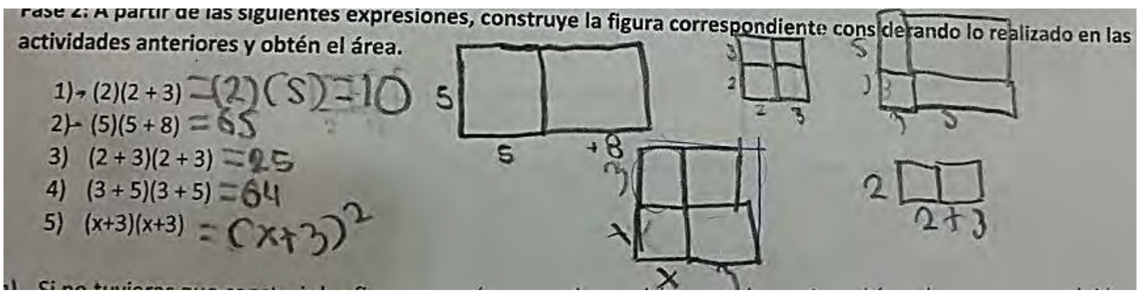
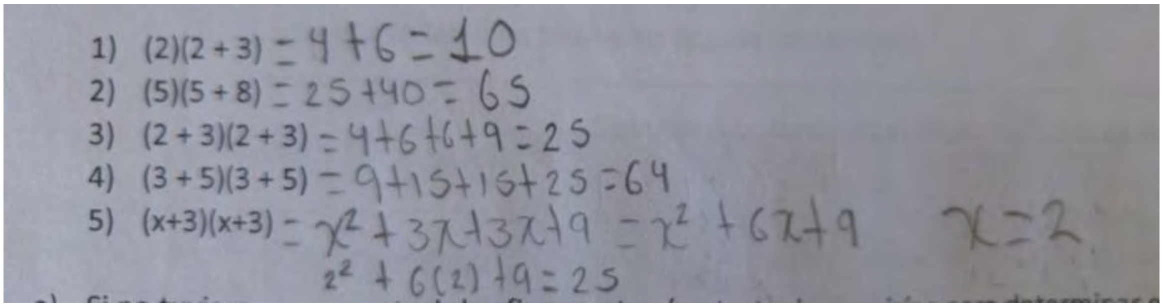


Fig. 4.12. Representación de los casos propuestos por el equipo D.

Para poder obtener las áreas de las figuras, los equipos A y E se centraron en las operaciones y no en su representación, esto pudo deberse también a la forma en la que se planteó la pregunta. Sin embargo, se pudo observar que para el caso general lograron hacer la expansión. Los estudiantes del equipo E lograron identificar la equivalencia de las expresiones, la evidencia es que ellos comentaron que, si asignaban un valor cualquiera a la literal, los resultados numéricos debían ser los mismos y para tener certeza de su afirmación asignaron a x el valor de dos en las expresiones $(x+3)^2$, $x^2+3x+3x+$ (3)(3) y x^2+6x+3^2 (Fig. 4.13).

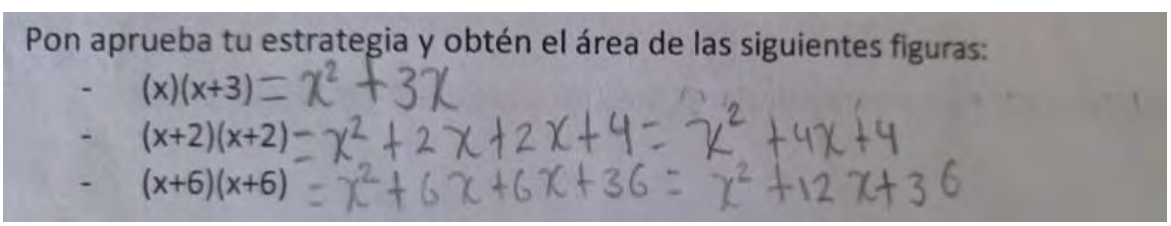


1) $(2)(2+3) = 4 + 6 = 10$
2) $(5)(5+8) = 25 + 40 = 65$
3) $(2+3)(2+3) = 4 + 6 + 6 + 9 = 25$
4) $(3+5)(3+5) = 9 + 15 + 15 + 25 = 64$
5) $(x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9 \quad x = 2$

$2^2 + 6(2) + 9 = 25$

Fig. 4.13. Identificación de equivalencia entre expresiones generales

Por último, para identificar la permanencia de las conexiones entre las representaciones geométricas y las expresiones algebraicas, se propusieron los siguientes productos: (x)(x+3), (x+2)(x+2) y (x+6)(x+6) y se solicitó a los estudiantes que obtuvieran expresiones equivalentes. Aquellos estudiantes que, de manera consistente, no atendían las sugerencias proporcionadas por el instructor no pudieron resolver la tarea. El equipo E fue el único equipo que por sí mismo se dio cuenta de que el análisis de los casos particulares, en cada una de las tareas, los conducía a obtener la equivalencia de las expresiones algebraicas. Por ejemplo, comentaron que "al representar las operaciones era más fácil identificar la variable". Para responder a esta situación, tanto el equipo A como el equipo E, utilizaron la construcción de una figura geométrica por caso. Consideraron que cada factor en los productos representaba, ya sea la base o la altura de la figura, dando de esta manera, sentido a los símbolos. Para dar solución obtuvieron el área por regiones, al igual que en la situación anterior (Fig. 4.14).



Pon aprueba tu estrategia y obtén el área de las siguientes figuras:

- $(x)(x+3) = x^2 + 3x$
- $(x+2)(x+2) = x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$
- $(x+6)(x+6) = x^2 + 6x + 6x + 36 = x^2 + 12x + 36$

Fig. 4.14. Expansión de productos utilizando los modelos de área.

El equipo B realizó una operación algebraica para llegar al resultado, pero sin relacionarlo con la construcción de modelos geométricos. El equipo D, sólo consiguió identificar que $(x+2)(x+2) = (x+2)^2$. Mientras que el equipo C no concluyó con la actividad.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1 Introducción

En este capítulo se contrastan los resultados de este trabajo, con los que se han obtenido en investigaciones previas, con respecto a la propiedad distributiva. Posteriormente, se realiza una reflexión en donde se describen los alcances de la investigación con la finalidad de orientar futuros trabajos en líneas similares. Finalmente, se identifica cómo la realización de este trabajo contribuyó a reflexionar sobre el actuar del docente. Es importante señalar que las tareas presentadas en este trabajo se centran en que los estudiantes desarrollen actividades transformacionales ya que permite a los estudiantes crear e identificar relaciones entre las expresiones algebraicas y las áreas.

5.2 Respuesta a la pregunta de investigación

Se obtuvo evidencia de que las tareas permitieron, en algunos casos, favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva y además dar sentido a los símbolos. Los casos favorables se obtuvieron con los equipos en donde los estudiantes no sólo se enfocaron en obtener un resultado y responder la hoja de trabajo. La identificación de patrones, el dar sentido a los símbolos y la construcción de relaciones entre diversas ideas matemáticas, fueron elementos que favorecieron el proceso de transición de aritmética al álgebra y desarrollo de aprendizaje con entendimiento.

Con respecto a los símbolos, se observó que éstos fueron relacionados con elementos del contexto, en este caso, con las longitudes y áreas de figuras geométricas. Comúnmente en los salones de clase, el álgebra se reduce a la manipulación de símbolos, que, en muchos casos, no representan algo para el estudiante (Kaput, 1999; Ding y Li, 2014). Sin embargo, con la implementación de las tareas, se apoyó a que los estudiantes relacionaran ideas aritméticas, algebraicas y geométricas. De esta manera, se ofreció al estudiante una estrategia para el desarrollo de aprendizaje con entendimiento.

Inicialmente la mayoría de los estudiantes mostró dificultades para generalizar, ya que esta actividad requiere centrar el razonamiento y la atención de los estudiantes, en los patrones y las regularidades presentes en las estructuras de las expresiones, más que sólo en el cálculo de resultados. Los estudiantes que se enfocaron solo en obtener del área, tuvieron complicaciones para identificar lo variante e invariante y determinar la expresión general. En algunos equipos se observó que, a pesar de que expresaban ideas mediante símbolos, siempre regresaban a considerar casos particulares. El uso que hicieron de las literales no necesariamente involucró procesos de generalización. Esta dificultad se originó debido a la tendencia que tienen los estudiantes por calcular y obtener resultados en vez de representar las operaciones y reflexionar sobre estas (Fig. 5.1).

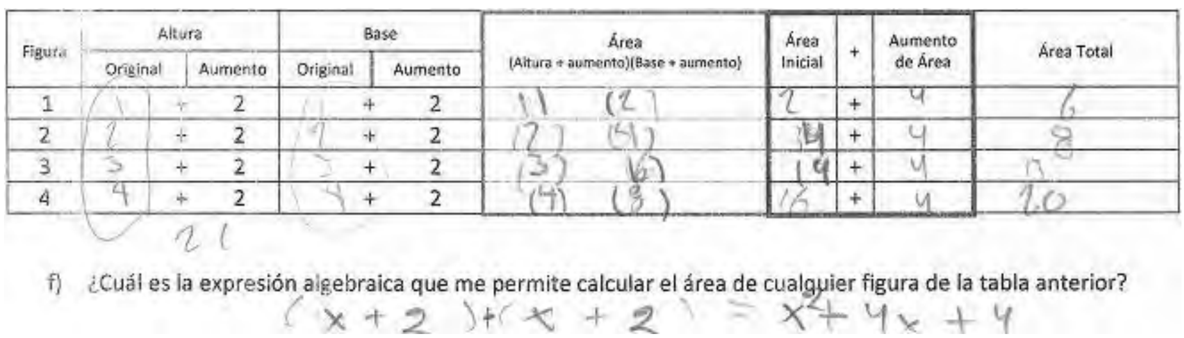


Figura	Altura			Base			Área (Altura + aumento)(Base + aumento)	Área Inicial	+	Aumento de Área	Área Total
	Original		Aumento	Original		Aumento					
1	1	+	2	1	+	2	(1) (2)	2	+	4	6
2	2	+	2	4	+	2	(2) (4)	14	+	4	8
3	3	+	2	3	+	2	(3) (6)	19	+	4	13
4	4	+	2	4	+	2	(4) (8)	16	+	4	20

21

f) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la tabla anterior?

$(x+2)+(x+2) = x^2+4x+4$

Fig. 5.1. Obtención de la expresión general por operación algebraica y no por generalización ni identificación de relaciones.

Por otro lado, aquellos estudiantes que representaron las operaciones, pudieron observar las regularidades en las estructuras y utilizar variables para representarlas y generalizar. Compartimos los resultados de Malara y Navarra (2009) con respecto a que, el punto clave para favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva, es enfocar la atención de los estudiantes en los patrones presentes en la estructura de diversas expresiones.

La generalización de patrones, presentes en las estructuras de las expresiones que representan el área de las secuencias de figuras, puede favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva. Sin embargo, es necesario que el instructor centre la atención de los estudiantes en la representación de las operaciones y no en la obtención de resultados. Por otro lado para favorecer el proceso de generalización, es necesario que los símbolos sean conceptualizados como variables. Sin embargo, según el análisis que se realizó, algunos de los estudiantes las conceptualizan como números desconocidos, mientras que otros lo hacen como letras evaluadas (Enfedaque, 1990), es decir, símbolos a los que se les asigna un valor desde el principio (Fig. 5.2).

Figura	Altura	Base: Original	Base: Aumento	Área: (Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1	+ Y	(1)(1+1)	(1)(1)	(1)(1)	(1)(1) + (1)(1)
2	2	2	+ Y	(2)(2+1)	(2)(2)	(2)(1)	(2)(2) + (2)(1)
3	3	3	+ Y	(3)(3+1)	(3)(3)	(3)(1)	(3)(3) + 3(1)
4	4	4	+ y	(4)(4+1)	(4)(4)	(4)(1)	(4)(4) + (4)(1)

Fig. 5.2. Concepción de la literal como letra evaluada.

Al trabajar con secuencias, algunos estudiantes están acostumbrados a utilizar estrategias de proporcionalidad y tienden a pensar que las primeras diferencias de la sucesión siempre son constantes. Los estudiantes establecían una conjetura a partir de considerar únicamente el primer caso particular y realizaban la transferencia hacia los demás casos, sin verificarla. Al final esta situación dificultó el proceso de generalización y entendimiento de la propiedad distributiva (Fig. 5.2).

Figura	Altura	Base: Original	Base: Aumento	Área: (Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1	+ 3	(1)(1) + 3	(1)(1)	+ 3	(1)(1) + 3 = 4
2	2	2	+ 3	(2)(2) + 3	(2)(2)	+ 3	(2)(2) + 3
3	3	3	+ 3	(3)(3) + 3	(3)(3)	+ 3	(3)(3) + 3
x	(x)	(x)	+ 3	(x)(x) + 3	(x)(x)	+ 3	(x)(x) + 3

Fig. 5.3. Extensión de una conjetura a partir del análisis de un solo caso particular.

También, se logró identificar algunos factores o elementos que es necesario considerar al diseñar e implementar tareas, para favorecer el entendimiento de la propiedad distributiva: (a) la concepción de álgebra que poseen los docentes, (b) el significado que dan los estudiantes a los símbolos alfanuméricos, (c) la escasa relación que se le da con otros temas o conceptos, (d) las estrategias y materiales de apoyo que utilizan los docentes para su enseñanza, (e) la habilidad que poseen los estudiantes para identificar las características estructurales de la propiedad, y (f) la inexistente relación entre las operación de suma y producto.

5.3 Trabajos a futuro

Actualmente, la mayoría de los estudiantes considera que la escuela y específicamente el aprendizaje de matemáticas, no tienen valor ni importancia para su desarrollo personal, dado que en muchos casos es considerado como innecesario y en algunos contextos, es una obligación impuesta por la familia. Consideramos que por esta razón, la implementación de las tareas no fue sencilla, principalmente porque diversos estudiantes no mostraron interés por realizarlas. Otros trabajos podrían enfocarse a identificar qué características deben tener las tareas para favorecer y motivar el interés del estudiante por el aprendizaje de matemáticas.

Durante el desarrollo de las tareas, en algunas ocasiones, el instructor no solicitó a los estudiantes argumentar sus respuestas. Esta etapa en el proceso de instrucción, es de fundamental importancia para conocer las formas de pensar de los estudiantes y así poderlos ayudar a avanzar para lograr el entendimiento. Se sugiere que, durante el desarrollo de las tareas de instrucción, el docente solicite regularmente que el estudiante argumente sus resultados. Estos argumentos nos pueden proporcionar información para identificar si ha desarrollado entendimiento. Por otro lado, las tareas se implementaron con estudiantes que ya tenían algunos conocimientos de álgebra, por lo que adicionalmente, se propone realizar investigaciones similares, pero con estudiantes sin conocimientos de álgebra.

Como parte del proceso de dar sentido a los símbolos, es importante considerar las diferentes interpretaciones que los estudiantes le dan a la literal (como objeto, como letra evaluada, incógnita, variable). Para nuestro caso, las interpretaciones que el estudiante asignó a las literales, causaron dificultades para generalizar las regularidades presentes en las expresiones. Se propone considerar la implementación de tareas previas que favorezcan el desarrollo de un significado o sentido para la simbología y, en el caso de aquellas tareas que involucren generalización, conducir a los estudiantes a conceptualizar a los símbolos como variables. Además, con base en los resultados se propone que la atención de los estudiantes sea enfocada en la representación de las operaciones y no solo en los resultados.

Por cuestiones de tiempo, las tareas únicamente incluyeron secuencias en donde se realizaron incrementos en la base y en la altura de forma independiente y, posteriormente, incrementos simultáneos e iguales, pero hizo falta analizar el caso donde los incrementos en la base y la altura eran desiguales. Otro elemento que es importante considerar en toda tarea, es el planteamiento de cuestionamientos. Éstos se deben presentar de manera clara, sin ambigüedades, ya que pueden apoyar al instructor a centrar la atención del estudiante en elementos clave para el desarrollo de entendimiento o en caso contrario, desviar la atención del estudiante. Por ejemplo, en este trabajo se solicitó a los estudiantes que calcularan el área (Fig. 4.12) pero en realidad se buscaba que los estudiantes la expresaran de dos maneras diferentes.

5.4 Reflexiones finales

Como docentes, necesitamos reflexionar constantemente sobre los resultados de las tareas que utilizamos, como recurso para el desarrollo de aprendizaje. Debemos arriesgarnos a explorar, utilizar o diseñar tareas de instrucción que permitan al estudiante desarrollar entendimiento y no limitarnos a continuar implementando actividades que solo promueven la memorización y aplicación de algoritmos o recetas. Generalmente, el docente sigue de manera lineal el programa de estudio implementando tareas que, en la mayoría de los casos, no permiten a los estudiantes relacionar o conectar ideas o conceptos. Consideramos que es importante darle mayor prioridad al desarrollo de entendimiento porque de esta manera, incluso, ofrecemos a los estudiantes la oportunidad de dar sentido al estudio de las matemáticas (Vinner, 2013).

Antes de implementar o diseñar una tarea, es necesario considerar que ésta debe representar un reto cognitivo para los estudiantes, poner en juego sus habilidades y conocimientos, y permitir que se involucren de manera activa en la construcción de su propio aprendizaje. Las tareas propuestas en los libros de texto, centran la atención de los estudiantes únicamente en los procesos y resultados, no representan un reto cognitivo y muchas veces, carecen de sentido para ellos. Son las tareas las que determinan las características del conocimiento que los estudiantes construyen, el cual puede ser un atomizado o altamente estructurado (con entendimiento). Razón por la cual, los docentes deberíamos reflexionar más sobre las tareas que seleccionamos, diseñamos o utilizamos para trabajar con los estudiantes.

El diseño de tareas es una actividad compleja que los profesores debemos desarrollar y mejorar constantemente. Al diseñarlas, es indispensable considerar el contexto sobre el cual se van a desarrollar ya que éste, influye en la construcción de significados y relaciones. Una tarea nunca está finalizada. Después de su implementación, es posible identificar formas de mejorarla, en función de los resultados obtenidos. Además, siempre requerirá de adaptaciones dependiendo de las características de los estudiantes con los cuales se busca implementar. Por ejemplo, al diseñar la tarea para nuestra investigación, se propuso una serie de tablas para que los estudiantes registraran los datos pero en algunos casos, éstas contenían columnas ambiguas que generaron que los estudiantes tuvieran conflictos para identificar y representar cierta información. En una nueva tarea, esta ambigüedad debería eliminarse.

Durante el desarrollo de las tareas, identificar qué y cómo están pensando los estudiantes, es un punto clave para orientarlos y ofrecer sugerencias, que les permitan avanzar en el proceso de solución de problemas o librar ciertos obstáculos. De igual forma, durante la instrucción de matemáticas, algunos docentes olvidan que el aprendizaje se debe dar de manera progresiva y prestan poca atención a la terminología y al lenguaje que utilizan con los estudiantes. En muchos casos, comienzan implementando tareas sin conocer qué conocimientos o habilidades poseen o han desarrollado los estudiantes. Esta situación ofrece pocas oportunidades al estudiante para explorar ideas, generar hipótesis, comunicar, validar y estructurar nuevas ideas.

Actualmente es necesario incluso, prestar atención a las expresiones corporales de los estudiantes, para determinar si conocen cierta idea o tienen conocimiento previo. Asimismo, debemos tener en mente que los estudiantes no poseen los mismos conocimientos que los instructores, por lo que es necesario entonces, brindarles apoyo de acuerdo a sus requerimientos individuales, en la medida de lo posible.

REFERENCIAS

Baldor, A. (1997). *Álgebra.* México: Publicaciones Cultural.

Barrera-Mora, F. y Santos-Trigo, L. (2000). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento. En Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia, 166-185.

Barrera, F., y Reyes, A. (2016). Design technology-based tasks for enhancing mathematical understanding through problem solving. En L. Uden, D. Liberona yT. Welzer (eds.), *Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 183-192). Springer.

Bensone, J., Wall, J. y Malm, J. (2013). The Distributive property in grade 3? *Teaching Children Mathematics*, *19*(8), 498-506.

Borrego, M., Douglas, E., y Amelink, C. (2009). Quantitative, qualitative and mixed research methods in engineering education. *Journal of Engineering Education, 98*(1), 53-66.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education*, *37*(2), 87-115.

Carpenter, T., y Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema y T. A. Romberg (eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp. 19 – 32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., y Yackel, E. (2011). Social Constructivism. En E. Yackel, K. Gravemeijer, y A. Sfard (Eds.), *A journey in Mathematics Education Research: Insights form the work of Paul Cobb* (pp. 33-40). Melbourne, AU: Springer.

Denham, A., R. (2015). Supporting conceptual understanding of the associative and distributive properties through digital gameplay. *Journal of Computer Assisted Learning, 31*, 706-721.

Devlin, K. (2000). *The math gene: How mathematical thinking evolved and why numbers are like gossip.* New York: Basic Books.

Ding, M., y Li, X. (2014). Transition from concrete to abstract representations: the distributive property in a Chinese textbook series. *Educational Studies in Mathematics, 87*(1), 103-121.

Driver, R. (1987). Promoting conceptual change in classroom settings: The experience of children's learning in science project. En J. Novak (Ed.), *Proceedings of the second international seminar on misconceptions and educational strategies in science and mathematics* (pp. 96 – 107). Ithaca, NY: Cornell University.

Edwards, T. G. (2000). Some big ideas of algebra in the middle grades. *Mathematics teaching in the middle school, 6*(1), 26-31.

Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual frameworks for research. Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researchers. En R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education* (pp. 202-219). Blaksburg, VA: PME.

Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *SUMA, 5(1),* 23-34.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: The Falmer Press.

Ernest, P. (2010). Reflection of theories of learning. En L. English, y B. Sriraman. (Ed.). *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 39-47). Melbourne, AU: Springer.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., y Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

García, M. A. (2012). *Álgebra.* México: Esfinge.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2004). *Didáctica de la Matemática para maestros.* Granada: Universidad de Granada.

Godino, J. D., Castro, W. F., Aké, L. P., y Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática, 26(42B),* 483-511.

Gómez, L. F. (1997). *La enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva sociocultural del desarrollo cognoscitivo.* Guadalajara, México: ITESO.

Instituto Nacional de Estadística y Geografía [INEGI] (2015). *Características educativas de la población.* Recuperado de http://www.beta.inegi.org.mx/temas/educacion/

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp. 133 – 155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En T. D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kilpatrick, J., Swafford, J., y Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kincer, C., y Stanford, T. (2015). The Distributive Property: The Core of Multiplication. *Teaching Children Mathematics, 20*(5), 302-309.

Larsson, K. (2015). Sixth grade students' explanations and justifications of distributivity. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the ninth congress of the European Society for the research in mathematics education* (pp. 295-301). Praga: CERME 9.

Lester, F. (2010). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. In B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education*, (pp. 67–85). Heidelberg: Springer.

Malara, N. A., y Navarra, G. (2009). Approaching the distributive law with young pupils. *PNA, 3*(2), 73-85.

Milton, K., y Reeves, H. (2001). Using Algebra in the Early Stages of its Learning. En The Australian Association of Mathematics Teachers Inc. (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth Biennial Conference of The Australian Association of Mathematics Teachers Inc*. (pp. 341-349). Adelaide, AU:AAMT.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Oltenau, L. (2017). Distributive law as object of learning through direct and inverse task. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 6*(1), 56-65.

Ontario Ministry of Education. (2013). *Paying attention to algebraic reasoning: Support document for paying attention to mathematics education.* Toronto, ON: Queen's printer for Ontario.

Palarea, M. S., y Socas, M. M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 1*(16), 91-98.

Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes [Planea] (2016). *Planea en educación media superior*. Recuperado de: http://planea.sep.gob.mx/ms/

Rojas Garzón, P. J., y Vergel Causado, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista Científica, 1*(1), 688-694.

Romberg, T. A., y Kaput, J. (1999). Mathematics worth Teaching, Mathematics worth Understanding. En E. Fennema and T. A. Romberg (eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp. 3-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Santos-Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos.* Mexico: Trillas.

Shafer, M. C., y Romberg, T. A. (1999). Assessment in classrooms that promote understanding. En E. Fennema and T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp. 3 – 17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Eds.). *Handbook for research o mathematics teaching and learning* (pp. 334 - 370). New York: Macmillan.

Schueler-Meyer, A. (2016). Flexibly Applying the Distributive Law-Students' Individual Ways of Perceiving the Distributive Property. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(10), 2719-2732.

Simon, M. A. (1993). Focus on children's mathematical learning in classrooms: impact and issues. En T. Wood, P. Coob, E. Yackel, y D. Dillon (Eds.), *Rethinking elementary school mathematics: Insights and Issues* (pp. 99 – 108). Reston, VA: National Council of Teachers of mathematics.

Simon, M., A. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 26*(1), 71-94.

Smith, K. J. (2012). *Mathematics: Its power and utility*. Estados Unidos de América: Thomson.

Skane, M. E., y Graeber, A. O. (1993). A conceptual change model implemented with college students: distributive law misconceptions. Paper presented at The *Third International Conference on Misconceptions in Science and Mathematics*. Ithaca, NY.

Steen, L. A. (1989). Teaching mathematics for tomorrow's world. *Educational Leadership*, *47*(1), 18-22.

Steen, L. A. (1988). The Science of Patterns. *Science, 240*(4852), 611-616.

Stein, M. K., Grover, B. W., y Henningsen, M. (2012). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal, 47*(2), 455-488.

Subsecretaría de Educación Media Superior [SEMS] (2013). Programa de Estudios: Bachillerato Tecnológico. Acuerdo 653. México: Secretaría de Educación Pública.

Tall, D. (1992). The Transition from Arithmetic to Algebra: Number Patterns or Proceptual Programming? En A. Baturo, y T. Cooper (Eds.), *New directions in algebra education: proceedings of the second annual conference on mathematics teaching and learning* (pp. 213-231). Brisbane: Red Hill.

Torres, L. C. (2015). *Álgebra*. México: Bookmart.

Tsai, Y. L., y Chang, C. K. (2009). Using combinatorial approach to improve students' learning of the distributive law and multiplicative identities. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(3), 501-531.

Tymoczko, T. (1998). *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* NJ: Princeton University Press.

Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn? *American Educator*, *19*(1), 30-37.

Vermeulen, N., Olivier, A., y Human, P. (1996). Student's awareness of the Distributive Property. En L. Puig, y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 379-386). Valencia: PME.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(2), 122-137.

Windsor, W. (2010). Algebraic Thinking: A Problem Solving Approach. En L. Sparrow, B. Kissane, y C. Hurts (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 665-672). Fremantle, AU: MERGA.

APÉNDICE A. Hojas de trabajo

Actividad 1:

Fase 1: Analiza la siguiente secuencia de cuadrados y completa la tabla:

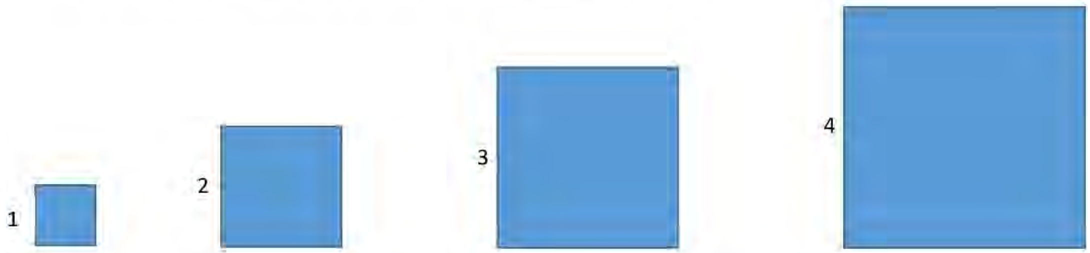


Figura	Altura	Base	Área	
			(Altura)(Base)	Representada como exponente
1	1	1		
2	2			
3	3			
4	4			

Si se continúa con la construcción de figuras:

1) ¿Cuáles serían las dimensiones y el área de la figura 10?

Figura	Altura	Base	Área	
			(Altura)(Base)	Representada como exponente
10				

2) ¿Cuáles serían las dimensiones de la figura 40 y la figura 100?

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Representada como exponente
40				
100				

3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura?, representa esta situación.

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Expresión Algebraica
x				

Fase 2: Si a la secuencia de figuras anterior, se le aumenta un centímetro a la base, se puede obtener la siguiente secuencia de figuras. En base a ellas completa la tabla. (Se recomienda llenar la tabla sin hacer cálculos, únicamente representando la operación).

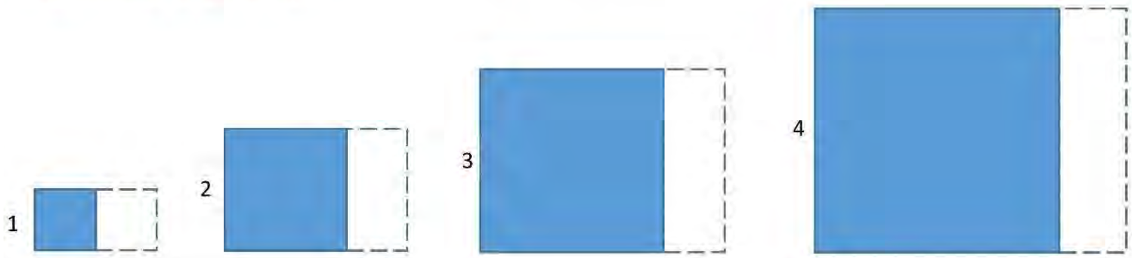


Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1	+ 1	(1)(1+1)	(1)(1)	(1)(1)	
2			+ 1				
3			+ 1				
4			+ 1				

Si se continúa con la construcción de figuras:

1) ¿Cuáles serían las dimensiones y el área de la figura 10?

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
10							

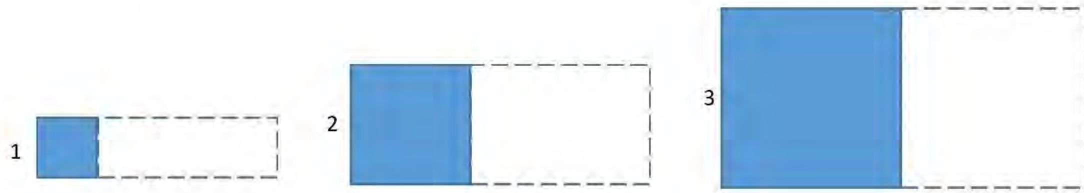
2) ¿Cuáles serían las dimensiones de la figura 45 y la figura 150?

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
45							
150							

3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura en esta secuencia?,

4) ¿Qué relación existe entre las áreas que obtuviste en la fase 1 y la fase 2?

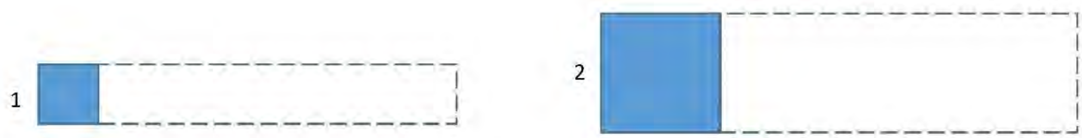
La secuencia de figuras inicial es nuevamente modificada para aumentar 3 centímetros a la base, como se muestra a continuación:



a. Completa la tabla.

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes		Total (Sombreada + aumento)
					Parte Sombreada	Parte que aumento	
1	1	1	+ 3	(1)(1+3)	(1)(1)	(1)(3)	
2			+ 3				
3			+ 3				
x			+ 3				

Si a cada figura de la secuencia inicial le aumento 6 cm a la base original:

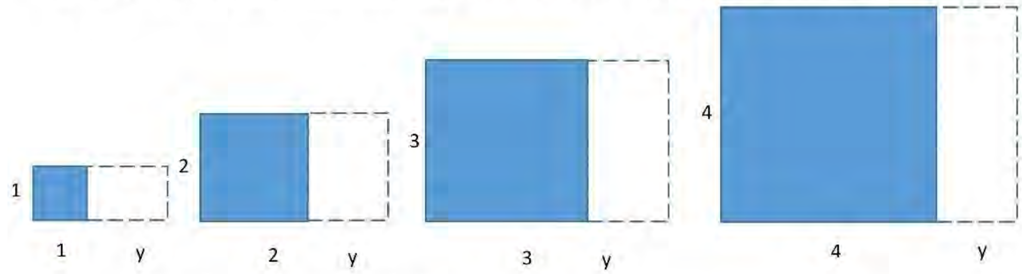


b. Completa la tabla en base a las figuras construidas

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes		Total (Sombreada + aumento)
					Parte Sombreada	Parte que aumento	
1	1	1	+ 6	(1)(1+6)	(1)(1)	(1)(6)	
2			+ 6				
3			+ 6				
x			+ 6				

Fase 3:

1) Si a cada figura de la secuencia inicial se le aumenta una cantidad "y" de centímetros a la base:



c. Completa la tabla en base a las figuras construidas

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1 +	Y				
2		+					
3		+					
4		+					

d. ¿Qué significa aumentar "y" unidades a la base?

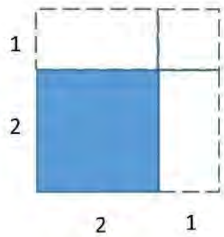
e. ¿Qué relación existe entre las columnas del área ?

f. ¿Existe la misma relación entre la información contenida en las tablas anteriores y la tabla del ejercicio anterior?

Actividad 2

Fase 1: Considerando la actividad anterior.

a) Traza 3 figuras cuadráticas adicionales de tamaños 4, 6 y 8 cm respectivamente, luego aumenta un centímetro a cada lado, como se muestra en la siguiente.



b) ¿Cómo calcularías el área únicamente de la región que aumentó?

c) Con base en las figuras y considerando la pregunta anterior, completa la siguiente tabla.

Figura	Altura		Base		Área (Altura + aumento)(Base + aumento)	Área Inicial	+	Aumento de Área	Área Total
	Original	Aumento	Original	Aumento					
1		+ 1		+ 1			+		
2		+ 1		+ 1			+		
3		+ 1		+ 1			+		
4		+ 1		+ 1			+		

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la serie?

e) Si en lugar de aumentar 1 cm, aumentamos 2 centímetros a la base y a la altura, completa la tabla.

Figura	Altura		Base		Área (Altura + aumento)(Base + aumento)	Área Inicial	+	Aumento de Área	Área Total
	Original	Aumento	Original	Aumento					
1		+ 2		+ 2			+		
2		+ 2		+ 2			+		
3		+ 2		+ 2			+		
4		+ 2		+ 2			+		

f) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la tabla anterior?

g) Si el aumento fuese de 6 cm a la base y a la altura, ¿cómo quedaría la expresión algebraica para calcular el área?

h) Y si fuese de 10 cm, 20 y 100 ¿cómo quedarían las expresiones?

i) ¿Qué relación existe entre las áreas y las expresiones?

Fase 2: A partir de las siguientes expresiones, construye la figura correspondiente considerando lo realizado en las actividades anteriores y obtén el área.

1) $(2)(2 + 3)$
2) $(5)(5 + 8)$
3) $(6)(6+ 4)$
4) $(2 + 3)(2 + 3)$
5) $(3 + 5)(3 + 5)$
6) $(x+3)(x+3)$

a) Si no tuvieras que construir las figuras, ¿qué estrategia seguirías para determinar el área?, descríbela.

Fase 3:

a) Pon aprueba tu estrategia y obtén el área de las siguientes figuras:
- $(x)(x+3)$
- $(x+2)(x+2)$
- $(x+6)(x+6)$

APENDICE B. Transcripción de audio recuperado, del trabajo del equipo E.

Estudiante 1: Actividad 1, fase 1. Analiza las siguientes secuencias de cuadrados y completa la tabla.

Estudiante 2: Eso es de primaria.

Estudiante 1: Nota: Recuerda que los exponentes se utilizan para indicar cuantas veces se multiplica por sí mismo un número.

Estudiante 3: A ver… tenemos el primero de base, de lado uno y de base uno, obvio es un cuadrado.

Estudiante 2: Está muy fácil, si acaso va a ser dos por dos, dos al cuadrado.

Estudiante 3: Si, ponle dos, dos, dos.

Estudiante 2: Puros dos, yo acá le pongo eh. Ósea llénalo de tres

Estudiante 1 y 3: Dos, tres, cuatro.

Estudiante 1: Dos por dos, dos cuadrado. Tres por tres, tres cuadrado.

Estudiante 3: Tres cuadrado, ajá.

Estudiante 1: Cuatro por cuatro…

Estudiante 2: Yo ya la completé…

Estudiante 1: Cuatro cuadrado.

Estudiante 3: Sí gracias.

Estudiante 1: Si se continua con la construcción de figuras, cuál sería las expresiones y el área de la figura siete.

Estudiante 2 y 3: Diez…

Estudiante 1: No, aquí estamos mal no…, si es cuadrado, pero multiplicar dos…

Estudiante 2: Sí es un cuadrado…

Estudiante 3: Está bien…

Estudiante 1: Oh, así está bien, por eso digo, algebraicamente…

Estudiante 3: ¿Cuáles serían las dimensiones y el área de la figura diez?, altura diez...

Estudiante 2: Base, diez.

Estudiante 3: Altura, diez.

Estudiante 2 y 3: Base diez por diez,

Estudiante 1: Van a poner cien o diez cuadrado.

Estudiante 3: Diez cuadrado, representada como exponente.

Estudiante 3: ¿cuáles serían las dimensiones de la figura 40 y de la figura 100?

Estudiante 1: 40, 40, 40 por 40 y 40 cuadrado.

Estudiante 3: No sí, en serio, está muy fácil esto.

Estudiante 2: Es de primaria.

Estudiante 1: Cuarenta cuadrado. Está muy fácil. Cien, cien, cien por cien al cien cuadrado. Está regalado.

Estudiante 1: Dice, ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura? Representa esta situación.

Estudiante 3: Lado por lado, no… Figura sería…

Estudiante 1: ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permita calcular el área? Lado por lado

Estudiante 3: La figura sería no, sería x, y altura y, base x.

Estudiante 2: Pero de cualquier figura.

Estudiante 3: Por eso …

Estudiante 1: Nada más sería solamente una, un lado, ósea marcarlo como x.

Estudiante 3: O sí, un lado nada más de hecho. X, x cuadrada.

Estudiante 1: x cuadrada, exacto.

Estudiante 3: Sería aquí figura x cuadrada, altura x, ah, pero espera… de cualquier figura.

Estudiante 2: Sería preguntar de que… si solo es con estas, con cuadrados o figuras así todas las en general.

Estudiante 1: Con un rectángulo sería, base por altura.

Estudiante 3: Entonces lo dejamos con x, y…

Estudiante 1: Es que quien sabe, a ver es que aquí no te dice si es un cuadrado verdad.

Estudiante 3: Páusale, no…

Estudiante 2: Profe, puede venir.

Estudiante 3: Profe, una pregunta, en este, en este que dice.

Estudiante 2: ¿Solo hace referencia a los cuadrados, o a cualquier figura?

Profesor: Por ejemplo, si ustedes analizan esta sucesión de figuras y la siguen construyendo, lo que les quiere dar a entender aquí es, que si se continua con la sucesión de figuras, va a llegar un momento en el ustedes que van a poder seguir construyendo más y les dice aquí, ¿cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura? Pero cualquier figura, de las que están en esta sucesión. Entonces…

Estudiante 3: Entonces sería *x* cuadrada, no.

Profesor: ¿Por qué? Porque...

Estudiante 1: Entonces estaba bien.

Profesor: ¿conoces o sabes cuál va a ser la medida que va a tener?

Estudiante 3: Eh, no. Puede ser desconocida, es variable.

Estudiante 1: Ajá, es una variable.

Profesor: Entonces, para representarla, ¿qué utilizas?

Estudiante 3: Una literal.

Profesor: Exactamente. Y así…

Estudiante 1 y 3: Ya estábamos bien.

Estudiante 3: Entonces es *x*, *x*, *x* por *x*, *x* cuadrada. Ok.

Estudiante 3: Fase 2: Si a la secuencia de figuras anterior se le aumenta un centímetro a la base, se puede obtener la siguiente secuencia de figuras. En base a ellas completa la tabla. Se recomienda llenar la tabla sin hacer cálculos, únicamente representando la operación.

Estudiante 3: A ver, figura uno, altura uno, base original uno más el aumento de uno. Altura después, de la figura dos es, altura de dos, la base original es de dos más uno.

Estudiante 1: Ah sí, es cierto, es cierto.

Estudiante 3: Después altura tres, original tres más uno.

Estudiante 1: Cuatro, cuatro más uno.

Estudiante 3: ¿qué dice?, área.

Estudiante 1: Aquí nada más tenemos que, éste, multiplicar esto por esto sumado.

Estudiante 2: Debe de llenar igual esta, no.

Estudiante 3: Si, sí, sí. Altura por base…

Estudiante 2: Sería, uno más, uno entre paréntesis y uno más uno en otro paréntesis.

Estudiante 1: Sí, es multiplicación. Sería uno por dos. Porque se están sumando estos dos.

Estudiante 3: Bueno sí, los podríamos sumar o podríamos representarlos tal y como están. A ver, pregúntale al profesor como quiere que lo hagamos.

Estudiante 2: Tal y como esta, no.

Estudiante 3: Es que también puede ser así. Puede simplificarse.

Estudiante 1, 2 y 3: Profe…

Estudiante 1: Aquí en esta parte está pidiendo que, si no nos va a multiplicar, pero aquí dice base más al aumento, entonces quiere decir que así lo vamos a pasar normal, así como uno por uno más uno o uno por dos completo.

Profesor: ¿qué les conviene más? por ejemplo, ustedes en esa parte de ahí, lo que quieren es representar la información de alguna manera, aquí ya les está sugiriendo como lo tienen que hacer. Dice altura por la base más el aumento.

Estudiante 1: Entonces sería sumarlos.

Estudiante 2: No, representarlo como esta. Esto es de primaria.

Estudiante 3: Uno por uno más uno. Después es dos por dos más uno.

Estudiante 1: Dos más uno, dos, no, tres por tres más uno, no.

Estudiante 3: Cuatro más cuatro más uno.

Estudiante 3: Ahora, hay que sacar el área por partes. ¿cuál es la parte sombreada? Hay que sacar su área primero. Sería… y ponemos el resultado o ponemos el área, ya.

Estudiante 1: Sombreada.

Estudiante 3: Pero me refiero, ponemos la operación que vamos a usar o ponemos el área.

Estudiante 1: O quiere que pongamos de nuevo la multiplicación de las partes. Sería uno por uno, no. Parte sombreada.

Estudiante 3: Es que no sé si se puede. Uno por uno o ya nada más el uno.

Estudiante 1: El uno, pero al cuadrado.

Estudiante 3: Sería dos por uno.

Estudiante 1: Dos por dos sería.

Estudiante 3: Aja dos por dos o nada más pongo el cuatro.

Estudiante 1: No, dos cuadrado. O no lo pide, ah no. Si, dos por dos sería.

Estudiante 3: ¿Cómo le ponemos?

Estudiante 2: Uno por uno…

Estudiante 3: Sí, es uno por uno, pero me refiero a cómo lo ponemos.

Estudiante 1: Aquí dice área por partes mira, date cuenta.

Estudiante 3: Entonces ponemos nada más el resultado.

Estudiante 2: Uno cuadrada, uno cuadrado.

Estudiante 3: A ver espera.

Estudiante 1: Área por partes.

Estudiante 3: Pero es área.

Estudiante 1: Área por partes

Estudiante 2: Uno al cuadrado, ¿no?

Estudiante 1: Ósea, ésta pidiendo el área solamente.

Estudiante 2: Uno al cuadrado, porque aquí te pide el área sombreada y la parte que aumentó.

Estudiante 3: Pero sería uno sombreado, o uno por uno o nada más el resultado.

Estudiante 1: Yo estoy leyendo que dice área por partes. Mira, por ejemplo, está pidiendo el área de la parte sombreada y el área de la parte del aumentó.

Estudiante 3: Pero, ¿Cómo lo expresamos?

Estudiante 2: Como el resultado.

Estudiante 1: Mira, uno por uno, uno cuadrado.

Estudiante 3: Entonces sería uno nada más.

Estudiante 1: Uno cuadrado.

Estudiante 3: No sería uno, sí, uno cuadrado. Si nos equivocamos, ni modo, porque es lapicero…

Estudiante 1: Mejor esperamos al profe…

Estudiante 3: Profe, aquí en el área por partes la expresamos con un uno por uno o uno al cuadrado o cómo…

Profesor: Fíjense, aquí el objetivo de la actividad es que ustedes vayan viendo cómo se van a ir modificando, en ese caso la serie de figuras y de qué manera, el anotar… Fíjate, aquí vas a ir haciendo la representación de lo que mide la altura por lo que mide la base. Va a llegar un momento en el que tú vas a seguir construyendo esta sucesión de figuras, en la que, si tú haces, por ejemplo 500 figuras y luego de esas 500 figuras, ¿cómo van a quedar las medidas y cómo vas a obtener el área? Entonces, aquí ya la tabla te está sugiriendo como vayas haciendo la anotación, tanto de la base como de la altura, pero también tienes que ir viendo la relación que va existiendo entre cada una de estas columnas. Aquí por ejemplo te decía, fíjense, aquí dice área; toda esta parte de la tabla representa el área y está dividida en tres partes. Esta es una manera para representarla. Aquí te están sugiriendo otra manera y acá otra. Si ustedes analizan la figura anterior, o lo que hicieron anteriormente, fíjense, figura uno, dos, tres, cuatro, ¿cómo eran la base y la altura, con respecto al número de la figura?

Estudiante 3: Iguales.

Profesor: Aquí hay dos columnas que me sirvieron para representar el área. Aquí lo estas representando cómo una qué…

Estudiante 3: Altura por base.

Profesor: Eso es un qué.

Estudiante 3: Un área o, ¿Cómo?

Profesor: Pero, esta representación y esta representación, ¿es la misma?

Estudiante 1 y 3: Si.

Estudiante 3: Allá tenemos un aumento del otro lado.

Profesor: Exactamente, entonces tienen que ir analizando de qué manera la tabla… Dime, por ejemplo, esto que tú tienes aquí al hacer la operación, ¿qué te va a representar?

Estudiante 3: El dos por uno, ¿no? El dos, sería el área total de toda la figura, incluyendo el aumento.

Profesor: Luego aquí te dice, área por partes: área de la parte sombreada, esta parte sombreada es la parte inicial y luego, parte del aumento...

Estudiante 1: Sería tres por uno en esta parte.

Profesor: Exactamente.

Estudiante 3: Uno por uno, dos por uno, tres por uno y cuatro por uno…

Profesor: Y luego fíjense, aquí ya les dice el total: el área de la parte sombreada más, lo que se aumentó.

Estudiante 1: Tres, una más una dos y uno por dos, serían dos.

Estudiante 3: Seria ésta ¿no?, entonces es con paréntesis. Del otro lado sería igual, uno por uno.

Estudiante 1: Sí, exactamente.

Estudiante 3: Ya después, abajo es dos por dos y sería dos por uno.

Estudiante 1: Tres por tres, tres por uno.

Estudiante 2: Y qué no cuando ya das el resultado, haz de cuenta, da el resultado aquí no, dos por dos, cuatro, y acá, ¿cómo lo representas?

Estudiante 3: Igual.

Estudiante 1: Es que aquí nada más te está pidiendo es por partes. Acá si ya me está pidiendo el completo. Esto es lo mismo que estos dos y esto es lo mismo que estos dos. Cuatro por cuatro, cuatro por una, este… ahora hay que hacer esta, ¿no?

Estudiante 3: Espera, ¿no sería uno por uno más uno por uno y después dos por dos más dos por uno?

Estudiante 1: Yo creo que hay que tomar ésta, porque aquí ya te está pidiendo todo esto completo.

Estudiante 3: A ver… Ésta es la altura uno.

Estudiante 1: Uno, es ésta. Ahora allá te la está pidiendo completa, el área completa de todo de todo, incluyendo estos dos. Entonces para sacar el área de un rectángulo, es base por altura. Entonces sería uno por dos, porque se están sumando estos dos, ya estos dos son uno y es lo que sale aquí.

Estudiante 3: ¿Crees?

Estudiante 1: Si. Es lo mismo que acá mira. Bueno, no, de hecho, no.

Estudiante 2: Yo digo que se quedan estas dos columnas juntas.

Estudiante 3: Yo digo lo mismo. Pero sería hacer uno por uno más uno por uno. Dos por dos más dos por uno. Si, ¿no?, algo así.

Estudiante 1: ¿Le preguntamos al profe? Es que yo creo que es así, porque ya te está pidiendo el área total, total, total. El área total.

Estudiante 2: Pero igual, éste sería el total.

Estudiante 1: Pero aquí estas multiplicando, haz de cuenta…

Estudiante 3: No, pero esto sería una parte. Tenemos el área de la parte sombreada, el de esto, después tenemos el área de esto. Ósea sumamos y obtenemos el área total.

Estudiante 1: Pero acá estas multiplicando y acá se suma primero.

Estudiante 3: Pero es que acá nada más se tiene el de los dos lados.

Estudiante 1: ¿Qué no es lo mismo?

Estudiante 3: No, no sale lo mismo.

Estudiante 2: Una cosa es área y otra cosa es…

Estudiante 1: A sí, sí. Aquí va a salir uno por uno va a ser uno cuadrado.

Estudiante 3: Ahí si sale, pero ahí en el dos ya no sale. Es cuatro...

Estudiante 1: De todos modos, no sale acá tampoco porque uno más dos…, uno más uno, dos y dos por una dos.

Estudiante 3: Oh, ¿sí? A ver espérame. Tenemos uno por uno, uno. Uno por uno, uno. Son dos y son dos, sí sale. Porque aquí haz de cuenta que esto se va a sumar. A ver, acá es…, aquí tenemos tres por dos, seis. Cuatro por dos, nos da ocho y aquí es a donde ya no coincide. No pero sí es esta de acá. Ésta es el área.

Estudiante 2: Pues ya hay que sacarla.

Estudiante 3: Entonces, ¿qué sería?

Estudiante 2: Uno por uno más uno por uno.

Estudiante 1: O sería que le hiciéramos, así como yo digo.

Estudiante 3: A ver, yo digo que así. Entonces sería uno por uno más uno por uno y luego dos por dos…

Estudiante 1: Me quede con la duda. Le voy a preguntar al profe.

Estudiante 3: Ya así. Más dos por uno, ¿no? Después es tres por pres más tres por uno. Cuatro por cuatro más cuatro por uno.

Estudiante 1: Ahora hay que sumarlos, ¿no?

Estudiante 3: Pero no dice sumarlos.

Estudiante 2: Sólo hay que representarlas, ¿apoco en la otra daba ese resultado?

Estudiante 1: Profe, yo quería preguntarle qué si por ejemplo, acá tenemos que sacar el área total de todo, ¿verdad?

Estudiante 2: ¿Solo es la representación?

Profesor: ¿Por qué me sirve la representación?

Estudiante 3: Para saber cómo va el aumento y qué relación tienen.

Profesor: Exactamente. Si ustedes lo hubiesen representado de otra manera ustedes, ¿creen que habrían podido identificar qué es lo que va cambiando en cada uno de esos casos?

Estudiante 2 y 3: No.

Profesor: Entonces, fíjense: ¿cómo son esta columna, esta columna y esta columna?

Estudiante 2: Diferentes.

Estudiante 3: Básicamente lo mismo, pero diferentes.

Estudiante 2: Diferentes procesos.

Estudiante 3: Operaciones….

Profesor: Básicamente es lo mismo, ¿por qué?, ¿qué están calculando?

Estudiante 2 y 3: El área.

Profesor: Entonces ahora, esto me representa el área. Esto también me representa ¿qué?

Estudiante 1: El área, pero de distintas…

Estudiante 3: Pero por separado.

Estudiante 1: Varía…

Profesor: Ésta es una manera de representarlo. Ésta y esta columna, ¿cómo son?

Estudiante 2: Son lo mismo, son iguales.

Profesor: Son iguales, nada más que está cambiando la forma en la que se está representando, ¿qué?

Estudiante 2: El área.

Estudiante 3: Pero, ¿ya estamos bien?

Estudiante 1: ¿sí estamos bien?

Profesor: Sí, sí está bien. Fíjense, aquí ya les está pidiendo…

Estudiante 1: Ésta con ésta son iguales y estas dos con ésta es igual.

Estudiante 2: Todas son iguales.

Profesor: Todas son iguales, nada más que está cambiando la manera en la que…

Estudiante 3: Se están representando.

Profesor. Exactamente, la manera en la que se están representando. Pero ahora, ¿qué operación tienen aquí?

Estudiante 2: Multiplicación.

Profesor: Ok muy bien, una multiplicación. Pero, ¿qué están multiplicando?

Estudiante 3: La altura por la base más el aumento que tiene.

Estudiante 2: Ósea, la base por la altura.

Profesor: Ahora, esto completo, ésta otra columna que dice área por partes, ¿cómo la obtuvieron?

Estudiante 2: Primero sacando el área de la parte sombreada y luego la parte del aumento.

Profesor: Exactamente, ¿y el área total?

Estudiante 3: Pues es la suma de las dos.

Profesor: Exactamente, entonces, ahora vean: esto que tienen aquí de la parte sombreada: ¿cómo es, con relación a la figura inicial?

Estudiante 3: Es la misma.

Profesor: ¿De qué otra manera lo pueden representar aquí?

Estudiante 3: Con cuadrados.

Profesor: ¿Por qué con cuadrados?

Estudiante 3: Porque son los mismos números y se están multiplicando. Se está multiplicando el mismo número por sí mismo.

Profesor: Exactamente, ¿Cuántas veces?

Estudiante 3: Dos

Profesor: ¿Qué potencia se utiliza para representar esta situación?

Estudiante 2 y 3: Cuadrado.

Estudiante 2: Ponlo así. Ya así está bien.

Estudiante 3: Es lo mismo, pero no sé si estamos bien.

Estudiante 2: Altura de la diez, base diez.

Estudiante 3: ¿Cuáles son las dimensiones y el área de la figura 10? Altura diez, original 10, aumento más uno. Altura sería diez por diez más uno. Lo podríamos poner también como diez cuadrado, ¿Sí le ponemos diez cuadrado más diez por uno? No sé qué digan. Ponle diez cuadrado más diez por uno.

Estudiante 3: ¿cuáles son las dimensiones de la figura 45 y la figura 150? Altura 45, la base original 45 más uno. 150 más uno, 150 y 150 más uno. Altura…

Estudiante 1: Serían 45 por 45 más uno. Y abajo 150 por 150 más uno. 45 por 45 más 45 por uno. 150 por 150 más 150 por uno.

Estudiante 3: 45 cuadrado más 45 por uno. Abajo sería 150 cuadrado más 150 por uno.

Estudiante 3: ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura en esta secuencia? Sería x por x más uno.

Estudiante 1: Sería la que tenemos acá ¿No? x, paréntesis, x más uno.

Estudiante 3: ¿Qué relación existe entre las series que obtuviste en la fase uno y la fase dos? La parte sombreada de la parte uno y la parte dos son lo mismo. Solamente se le agrega, ah… un momento…

Estudiante 1: Ponle que en la fase uno y la fase dos las partes sombreadas son iguales, pero en la fase dos se le agrega un espacio de una unidad de ancho.

Estudiante 3: Las partes sombreadas en ambas fases son iguales, pero en la fase dos se le aumenta una unidad al tamaño de la base.

Profesor: ¿Ya leyeron lo que dice aquí?

Estudiante 3: Si.

Profesor: Hace un rato me preguntaban que por qué y aquí está la parte donde dice que se recomienda llenar la tabla sin hacer los cálculos, únicamente representando las operaciones.

Profesor: Yo les preguntaba hace un momento, esta parte de aquí, la primera columna, esta parte de aquí y ésta, ustedes me dijeron: representa lo mismo nada más que esta anotado de diferente manera. Ahora, yo les preguntaba también, ésta, ésta y ésta son diferentes maneras de hacer las ¿qué?

Estudiante 3: Las operaciones.

Estudiante 2: La misma fórmula, ¿no?

Estudiante 1: Toda son iguales.

Profesor: Todas son iguales, exactamente. Solo que va cambiando, en este caso, la manera en la que se está representando la información.

Estudiante 2: Pero representan la misma fórmula, ¿no?

Profesor: ¿Por qué creen que sea importante considerar las diferentes maneras de representar el área?

Estudiante 3: Porque, por ejemplo, en algún caso nos puede hacer falta, falta pues sobrar algún dato. Porque, por ejemplo, como acá abajo dice la pregunta: ¿cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área en esta secuencia? y nosotros pusimos, x por x más uno y por ahí me comentaban que es lo mismo que en el anterior de x cuadrada, pero no puede ser lo mismo porque tenemos el aumento de uno y hay que representarlo en dicha ecuación.

Profesor: Ok y aquí tú ya me lo representaste como si estuvieras multiplicando la altura por la base más el aumento, pero ahora, también se puede representar, ¿de qué otra manera?

Estudiante 3: Sumando esto. Poniendo x cuadrada más x por uno. O también x por x más x por uno.

Estudiante 2: Pero en la fase dos se le agrega un aumento a la base de un centímetro en todos los casos.

Estudiante 3: Una unidad en la base de todas las figuras.

Estudiante 3: La secuencia de figuras inicial, es nuevamente modificada para aumentar tres centímetros a la base, como se muestra a continuación…

Estudiante 3: Es lo mismo, pero ahora con tres centímetros.

Estudiante 1: A bueno, pues aquí ponle. Dos, dos, tres, tres, x, x.

Estudiante 1: Aquí sería uno por uno más tres, luego dos por dos más tres, x por x más tres.

Estudiante 3: ¿Cómo quieren ponerle?

Estudiante 2: Como lo hicimos en la pasada.

Estudiante 1: uno por uno, uno por tres, dos por dos, dos por tres, tres por tres, tres por tres x por x, x por tres.

Estudiante 3: La parte sombreada sería esto.

Estudiante 3: Área total. Sería uno cuadrado más uno por tres.

Estudiante 1: Dos cuadrado más dos por tres, tres cuadrado más tres cuadrado.

Estudiante 3: Yo digo que tres por tres.

Estudiante 3: Si a cada figura de la secuencia inicial le aumento seis centímetros a la base original…

Estudiante 2: Es lo mismo, pero ahora con seis.

Estudiante 3: Sale, vamos por la última. Si a cada figura de la secuencia inicial se le aumenta una cantidad y de centímetros a la base. Ósea que esto ya es variable.

Estudiante 1: Entonces sería, dos, tres, cuatro, dos, tres, cuatro.

Estudiante 3: Uno por uno más y, dos por dos más y, tres por tres más y, cuatro por cuatro más y.

Estudiante 1: Luego, uno cuadrado más uno por y, dos cuadrado más dos por y, tres cuadrado más tres por y, cuatro cuadrado más cuatro por y.

Estudiante 3: Luego, ¿qué significa aumentar y unidades a la base? Que tiene un aumento variable que no puede ser representado con un número fijo.

Estudiante 2: Ya te toca escribir eso Vita.

Estudiante 1: ¿Aunque tenga letra fea?

Estudiante 3: Ya escríbele que tiene un aumento variable.

Estudiante 3: ¿Qué relación existe entre las columnas del área?

Estudiante 3: Representan el área de la figura total.

Estudiante 2: Representan la fórmula, ¿no? Base por altura. Representan el área, pero de diferentes maneras. Y todas son iguales.

Estudiante 3: ¿Existe la misma relación entre la información contenida entre las tablas anteriores y la tabla del ejercicio anterior?

Estudiante 2: Sí.

Estudiante 3: ¿Le ponemos un por qué?

Estudiante 1: No, así está bien.

APÉNCIDE C. Evidencia de trabajo de los estudiantes por equipo.

Equipo A

Equipo A

Fase 1: Analiza la siguiente secuencia de cuadrados y completa la tabla:

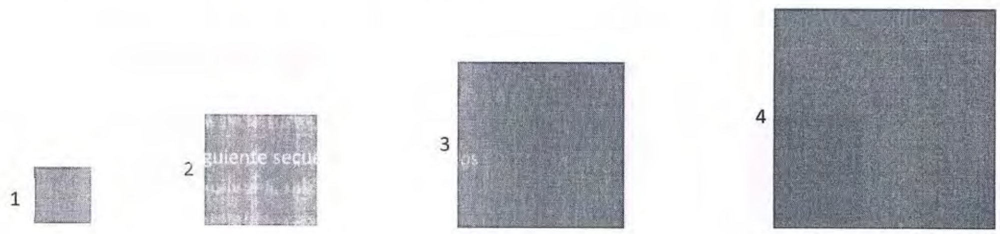


Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Área Representada como exponente
1	1	1	(1) (1)	(1) (1)
2	2	2	(2) (2)	(2) (2)
3	3	3	(3) (3)	(3) (3)
4	4	4	(4) (4)	(4) (4)

Nota: Recuerda que los exponentes se utilizan para indicar cuántas veces se multiplica por sí mismo un número.

Si se continúa con la construcción de figuras:

1) ¿Cuáles serían las dimensiones y el área de la figura 10?

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Área Representada como exponente
10	10	10	(10) (10)	10^2

2) ¿Cuáles serían las dimensiones de la figura 40 y la figura 100?

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Representada como exponente
40	40	40	(40) (40)	40^2
100	100	100	(100) (100)	100^2

3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura?, representa esta situación.

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Expresión Algebraica
x	x	x	x	x^2

Fase 2: Si a la secuencia de figuras anterior, se le aumenta un centímetro a la base, se puede obtener la siguiente secuencia de figuras. En base a ellas completa la tabla. (Se recomienda llenar la tabla primero numéricamente representando la operación).

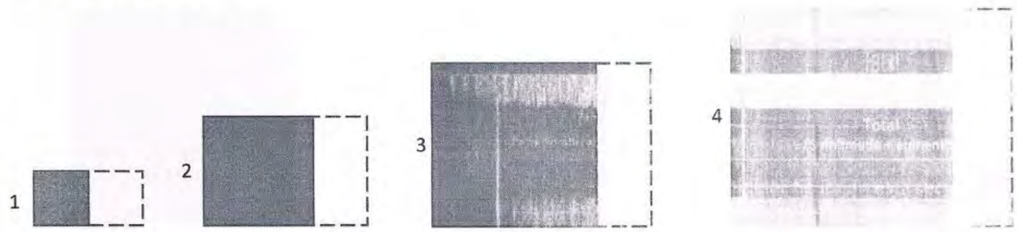


Figura	Altura	Base: Original	Base: Aumento	Área: (Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1 +	1	(1)(1)+1	(1)(1)	(1)(1)	1^2+1
2	2	2 +	1	(2)(2)+2	(2)(2)	(1)(2)	2^2+2
3	3	3 +	1	(3)(3)+1	(3)(3)	(1)(3)	3^2+3
4	4	4 +	1	(4)(4)+1	(4)(4)	(1)(4)	4^2+4

Si se continúa con la construcción de figuras:

1) ¿Cuáles serían las dimensiones y el área de la figura 10?

Figura	Altura	Base: Original	Base: Aumento	Área: (Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
10	10	10 +	1	(10)(10)+1	(10)(10)	(1)(10)	10^2+10

2) ¿Cuáles serían las dimensiones de la figura 45 y la figura 150?

Figura	Altura	Base: Original	Base: Aumento	Área: (Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
45	45	45 +	1	(45)(45)+1	(45)(45)	1 (45)	45^2+45
150	150	150 +	1	(150)(150)+1	(150)(150)	1 (150)	150 + 150

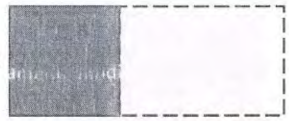
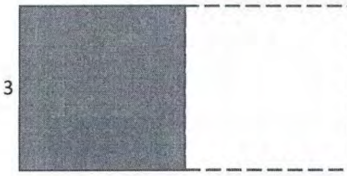
3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura en esta secuencia?,

Figura	Altura	Base	(Altura) (Base + Altura)
x	x	x+1	(x) (x+1)

4) ¿Qué relación existe entre las áreas que obtuviste en la fase 1 y la fase 2?

Que la base y la altura es lo mismo solo que lo que cambia es el aumento

La secuencia de figuras inicial es nuevamente modificada para aumentar 3 centímetros a la base, como se muestra a continuación:

1  2  3 

a. Completa la tabla.

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1 +	3	(1) (1) +3	(1) (1)	+3	1^2 +3
2	2	2 +	3	(2) (2) +3	(2) (2)	+3	2^2 +3
3	3	3 +	3	(3) (3) +3	(3) (3)	+3	3^2 +3
x	x	x +	3	(x) (x) +3	(x) (x)	+3	x^2 +3

Si a cada figura de la secuencia inicial le aumento 6 cm a la base original:

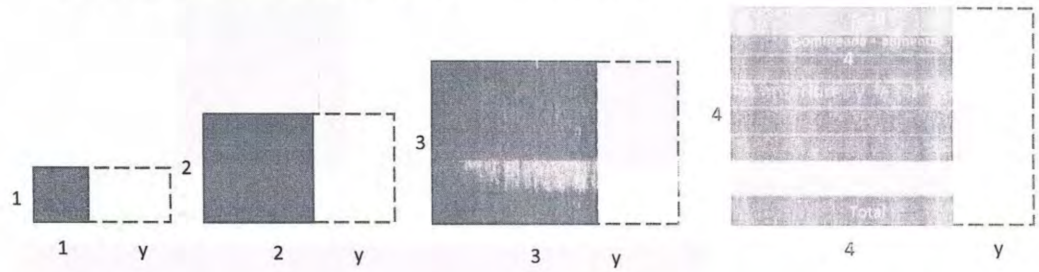
1  2 

b. Completa la tabla en base a las figuras construidas

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1 +	6	(1)(1) +6	(1) (1)	+6	1^2 +6
2	2	2 +	6	(2) (2) +6	(2) (2)	+6	2^2 +6
3	3	3 +	6	(3) (3) +6	(3) (3)	+6	3^2 +6
x	x	x +	6	(x)(x) +6	(x) (x)	+6	4^2 +6

Fase 3:

1) Si a cada figura de la secuencia inicial se le aumenta una cantidad "y" de



c. Completa la tabla en base a las figuras construidas

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1 +	Y	(1) (1) y	(1) (1)	y	$1^2 + y$
2	2	2 +	Y	(2) (2) y	(2) (2)	y	$2^2 + y$
3	3	3 +	Y	(3) (3) y	(3) (3)	y	$3^2 + y$
4	4	4 +	y	(4) (4) y	(4) (4)	y	$4^2 + y$

d. ¿Qué significa aumentar "y" unidades a la base?
Un aumento desconocido a una fingura

e. ¿Qué relación existe entre las columnas del área ?
Que son diferentes explicaciónes Pero que al final se encuentra el mismo resultado

f. ¿Existe la misma relación entre la información contenida en las tablas anteriores y la tabla del ejercicio anterior? No solo el aumento de la base.

Equipo A

Actividad 2

Fase 1: Considerando la actividad anterior.

a) Traza 4 cuadrados de tamaños 4, 6 y 8 cm respectivamente, enseguida aumenta un centímetro a cada lado. Como se muestra a continuación.

b) ¿Cómo calcularías el área únicamente de la región que aumentó?

Calcular el area completa y restar el area el aumento.

c) Con base en las figuras y considerando la pregunta anterior, completa la siguiente tabla.

Figura	Altura		Base		Área	Área	+	Aumento	Área Total
	Original	Aumento	Original	Aumento	(Altura + aumento)(Base + aumento)	Inicial		de Área	
1	2	+ 1	2	+ 1	(2+1)(2+1)	4	+	5	9
2	4	+ 1	4	+ 1	(4+1)(4+1)	16	+	17	33
3	6	+ 1	6	+ 1	(6+1)(6+1)	36	+	37	73
4	8	+ 1	8	+ 1	(8+1)(8+1)	64	+	65	129

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la serie?

$(x+1)^2$

e) Si en lugar de aumentar 1 cm, aumentamos 2 centímetros a la base y a la altura, completa la tabla.

Figura	Altura		Base		Área	Área	+	Aumento	Área Total
	Original	Aumento	Original	Aumento	(Altura + aumento)(Base + aumento)	Inicial		de Área	
1	2	+ 2	2	+ 2	(2+2)(2+2)	4	+	10	14
2	4	+ 2	4	+ 2	(4+2)(4+2)	16	+	34	60
3	6	+ 2	6	+ 2	(6+2)(6+2)	36	+	74	110
4	8	+ 2	8	+ 2	(8+2)(8+2)	64	+	130	194

f) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la tabla anterior?

$(x+2)^2$

g) Si el aumento fuese de 6 cm a la base y a la altura, ¿cómo quedaría la expresión algebraica para calcular el área?

$(x+6)^2$

h) Y si fuese de 10 cm, 20 y 100 ¿cómo quedarían las expresiones?

$(x+10)^2$, $(x+20)^2$, $(x+100)^2$

i) Si el cuadrado inicial tiene como medida de un lado "x" y se le aumenta "y" a cada lado:

a. ¿Cuál es la expresión que representa el área de la figura? $(x+y)^2$

b. ¿Qué proceso seguiste para obtener el área? Primero multiple las ares sombreadas y figura con figura.

c. ¿Qué representan las literales utilizadas en las medidas? Un valor icognito en cada uno.

Fase 2: A partir de las siguientes expresiones, construye la figura correspondiente considerando lo realizado en las actividades anteriores y obtén el área.

1) (2)(2 + 3) $4+6=10$
2) (5)(5 + 8) $25+40=65$
3) (2 + 3)(2 + 3) $4+6+6+9=25$
4) (3 + 5)(3 + 5) $9+15+15+25=64$
5) (x+3)(x+3) $x^2+3x+3x+9=x^2+6x+9=3^2+(6)(3)+9=9+18+9=36$

$x=3$

a) Si no tuvieras que construir las figuras, ¿qué estrategia seguirías para determinar el área de una manera rápida y sencilla?, descríbela.

Multiplicar la variable por si misma

b) Pon aprueba tu estrategia y obtén el área de las siguientes figuras:

- (x)(x+3) x^2+3x
- (x+2)(x+2) $x^2+2x+2x+4=x^2+4x+4$
- (x+6)(x+6) $x^2+6x+6x+36=x^2+12x+36$

Equipo B

Gustavo
Raul
Dariana
Maria del Carmen
Abraham

Equipo B

Fase 1: Analiza la siguiente secuencia de cuadrados y completa la tabla:

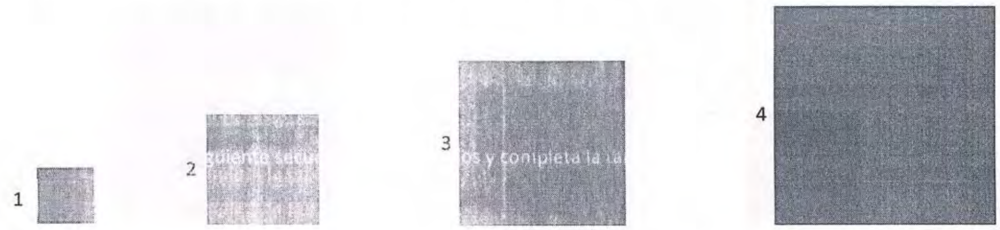


Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Representada como exponente
1	1	1	(1)(1)	1^2
2	2	2	(2)(2)	2^2
3	3	3	(3)(3)	3^2
4	4	4	(4)(4)	4^2

Nota: Recuerda que los exponentes se utilizan para indicar cuántas veces se multiplica por sí mismo un número.

Si se continúa con la construcción de figuras:

1) ¿Cuáles serían las dimensiones y el área de la figura 10?

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Área Representada como exponente
10	10	10	(10)(10)	10^2

2) ¿Cuáles serían las dimensiones de la figura 40 y la figura 100?

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Representada como exponente
40	40	40	(40)(40)	40^2
100	100	100	(100)(100)	100^2

3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura?, representa esta situación.

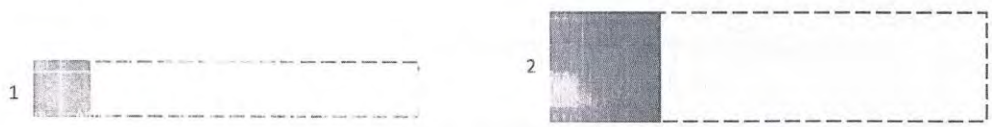
Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Expresión Algebraica
x	x	x	(x)(x)	x^2
	5	5	(5)(5)	$(5)^2$

La secuencia de figuras inicial es nuevamente modificada para aumentar 3 centímetros a la base, como se muestra a continuación:

a. Completa la tabla.

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes		Total (Sombreada + aumento)
					Parte Sombreada	Parte que aumento	
1	1	1	+ 3	(1)(1+3)	1	3	4
2	2	2	+ 3	(2)(2+3)	4	6	10
3	3	3	+ 3	(3)(3+3)	9	9	18
x	x	x	+ 3	(x)(x+3)	x^2	3x	x^2+3x

Si a cada figura de la secuencia inicial le aumento 6 cm a la base original:

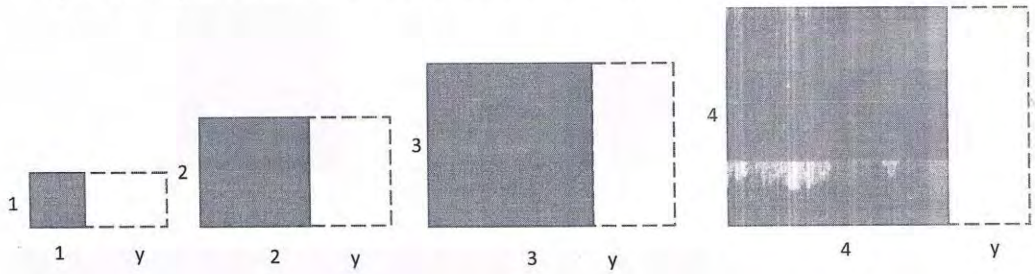


b. Completa la tabla en base a las figuras construidas

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes		Total (Sombreada + aumento)
					Parte Sombreada	Parte que aumento	
1	1	1	+ 6	(1)(1+6)	1	6	7
2	2	2	+ 6	(2)(2+6)	4	12	16
3	3	3	+ 6	(3)(2+6)	18	18	21
x	x	x	+ 6	(x)(2+6)	x^2	6x	x^2+6x

Fase 3:

1) Si a cada figura de la secuencia inicial se le aumenta una cantidad "y" de centímetros a la base:



c. Completa la tabla en base a las figuras construidas

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes		Total (Sombreada + aumento)
					Parte Sombreada	Parte que aumento	
1	1	1	+ Y	(1)(1 + y)	1	y	1 + y
2	2	2	+ Y	(2)(2 + y)	4	y	2 + y
3	3	3	+ Y	(3)(3 + y)	6	y	3 + y
4	4	4	+ y	(4)(4 + y)	16	y	4 + y

d. ¿Qué significa aumentar "y" unidades a la base?

e. ¿Qué relación existe entre las columnas del área ?

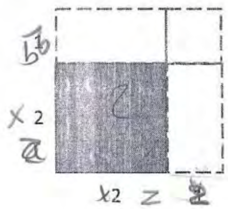
f. ¿Existe la misma relación entre la información contenida en las tablas anteriores y la tabla del ejercicio anterior?

Equipo B

Actividad 2

Fase 1: Considerando la actividad anterior.

a) Traza 4 cuadrados de tamaños 4, 6 y 8 cm respectivamente, enseguida aumenta un centímetro a cada lado. Como se muestra a continuación.



b) ¿Cómo calcularías el área únicamente de la región que aumentó?

$2(2\times 1)+1 = 5$

c) Con base en las figuras y considerando la pregunta anterior, completa la siguiente tabla.

Figura	Altura		Base		Área (Altura + aumento)(Base + aumento)	Área Inicial	+	Aumento de Área	Área Total
	Original	Aumento	Original	Aumento					
1	1	+ 1	1	+ 1	(1) (1)	1	+	1	2
2		+ 1	2	+ 1	(2) (2)	4	+	2	6
3	3	+ 1	3	+ 1	(3) (3)	9	+	3	12
4	4	+ 1	4	+ 1	(4) (4)	16	+	4	20

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la serie?

$(x+1)+(y+1)=$

e) Si en lugar de aumentar 1 cm, aumentamos 2 centímetros a la base y a la altura, completa la tabla.

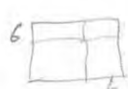
Figura	Altura		Base		Área (Altura + aumento)(Base + aumento)	Área Inicial	+	Aumento de Área	Área Total
	Original	Aumento	Original	Aumento					
1	1	+ 2	1	+ 2	(1) (2)	2	+	4	6
2	2	+ 2	2	+ 2	(2) (4)	4	+	4	8
3	3	+ 2	3	+ 2	(3) (6)	9	+	4	13
4	4	+ 2	4	+ 2	(4) (8)	16	+	4	20

21

f) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la tabla anterior?

$(x+2)+(x+2)=x^2+4x+4$

g) Si el aumento fuese de 6 cm a la base y a la altura, ¿cómo quedaría la expresión algebraica para calcular el área?



$(x+6)+(x+6)=$
$x^2+12x+36$

h) Y si fuese de 10 cm, 20 y 100 ¿cómo quedarían las expresiones?

$(x+10)+(x+10)=x^2+20x+100$

$(x+20)+(x+20)=x^2+40+400$

$(x+100)+(x+100)=x^2+200x+1000$

i) Si el cuadrado inicial tiene como medida de un lado "x" y se le aumenta "y" a cada lado:

a. ¿Cuál es la expresión que representa el área de la figura? $(x+y)*(x+y)$

b. ¿Qué proceso seguiste para obtener el área? sumar el area de los lados con el aumento

c. ¿Qué representan las literales utilizadas en las medidas? Las ~~medidas~~ lados y el aumento

Fase 2: A partir de las siguientes expresiones, construye la figura correspondiente considerando lo realizado en las actividades anteriores y obtén el área.

1) (2)(2 + 3) =10
2) (5)(5 + 8) 65
3) (2 + 3)(2 + 3) 25
4) (3 + 5)(3 + 5) 64
5) (x+3)(x+3) x^2+6x+9

a) Si no tuvieras que construir las figuras, ¿qué estrategia seguirías para determinar el área de una manera rápida y sencilla?, descríbela. hay que checar los dato epesar ala expresio

b) Pon aprueba tu estrategia y obtén el área de las siguientes figuras:

1 - (x)(x+3) x^2+3x
2 - (x+2)(x+2) x^2+4x+4
3 - (x+6)(x+6) $x^2+12x+36$

100x100
10000

Equipo C

Nancy Janeth Mejia Salvador

Michelle Contreras Serafin.

Equipo C

Fase 1: Analiza la siguiente secuencia de cuadrados y completa la tabla:

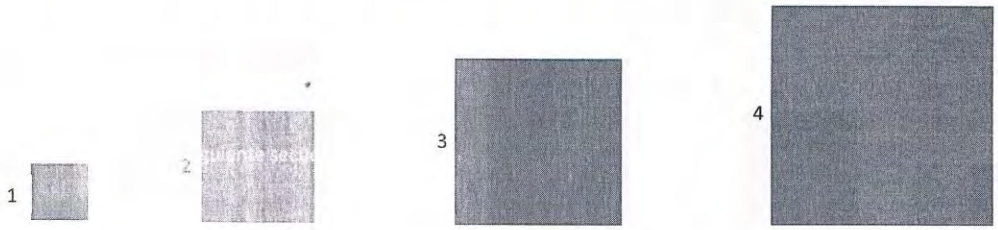


Figura	Altura	Base	Área: (Altura)(Base)	Área: Representada como exponente
1	1		(1)(1)	1^2
2	2	2	(2)(2)	2^2
3	3	3	(3)(3)	3^2
4	4	4	(4)(4)	4^4

Nota: Recuerda que los exponentes se utilizan para indicar cuántas veces se multiplica por sí mismo un número.

Si se continúa con la construcción de figuras:

1) ¿Cuáles serían las dimensiones y el área de la figura 10?

Figura	Altura	Base	Área: (Altura)(Base)	Área: Representada como exponente
10	10	10	(10)(10)	10^2

2) ¿Cuáles serían las dimensiones de la figura 40 y la figura 100?

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Representada como exponente
40	40	40	(40)(40)	40^2
100	100	100	(100)(100)	100^2

3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura?, representa esta situación.

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Expresión Algebraica
x^2	(4)	(4)	A=(4)(4)	4^2

$x=(4)(4)$

$x=(4^2)$

Fase 2: Si a la secuencia de figuras anterior, se le aumenta un centímetro a la base, se puede obtener la siguiente secuencia de figuras. En base a ellas completa la tabla. (Se recomienda llenar la ta[illegible] amente representando la operación).

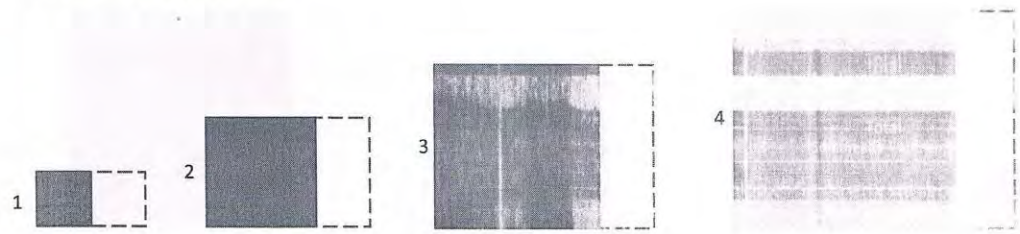


Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1 +	1	(1)(1+1)	(1)(1)	(1)(1)	(1)(1) + (1)(1)
2	2	2 +	1	(2)(2+1)	(2)(2)	(2)(1)	(2)(2) + (2)(1)
3	3	3 +	1	(3)(3+1)	(3)(3)	(3)(1)	(3)(3) + (3)(1)
4	4	4 +	1	(4)(4+1)	(4)(4)	(4)(1)	(4)(4) + (4)(1)

Si se continúa con la construcción de figuras:

1) ¿Cuáles serían las dimensiones y el área de la figura 10?

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
10	10	10 +	1	(10)(10+1)	(10)(10)	(10)(1)	10^2 + (10)(1)

2) ¿Cuáles serían las dimensiones de la figura 45 y la figura 150?

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
45	45	45	1	(45)(45+1)	(45)(45)	(45)(1)	45^2 + (45)(1)
150	150	150	1	(150)(150+1)	(150)(150)	(150)(1)	150^2 + (150)(1)

3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura en esta secuencia?,

A = (x) por (x+1)

4) ¿Qué relación existe entre las áreas que obtuviste en la fase 1 y la fase 2?

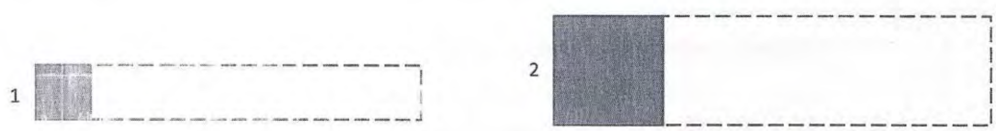
Que el procedimiento principal es el mismo, aunque en la fase dos aumenta un procedimiento que en este caso es mas uno, el cual hace un poco complicada la expresión.

La secuencia de figuras inicial es nuevamente modificada para aumentar 3 centímetros a la base, como se muestra a continuación:

a. Completa la tabla.

Figura	Altura	Base			Área			
		Original		Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1	+	3	(1)(1) + 3	(1) (1)	+ 3	(1) (1) + 3 = 4
2	2	2	+	3	(2) (2) + 3	(2) (2)	+ 3	(2) (2) + 3
3	3	3	+	3	(3) (3) + 3	(3) (3)	+ 3	(3) (3) + 3
x	(x)	(x)	+	3	(x)(x) + 3	(x)(x)	+ 3	(x) (x) + 3

Si a cada figura de la secuencia inicial le aumento 6 cm a la base original:

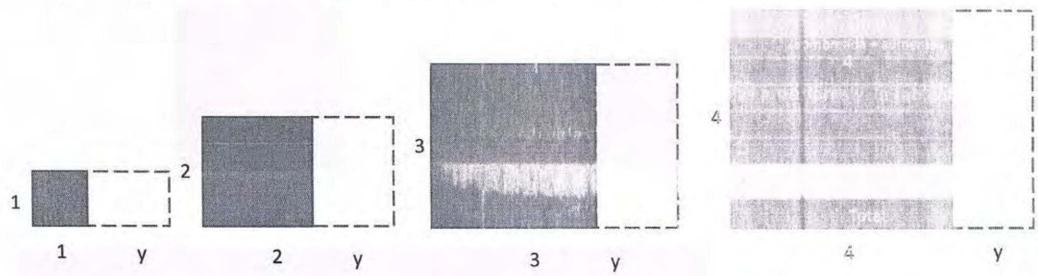


b. Completa la tabla en base a las figuras construidas

Figura	Altura	Base			Área			
		Original		Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1	+	6	(1) (1) + 6	(1) (1)	+ 6	(1) (1) + 6 = 7
2	2	2	+	6	(2)(2) + 6	(2) (2)	+ 6	(2) (2) + 6 = 10
3	3	3	+	6	(3) (3) + 6	(3) (3)	+ 6	(3) (3) + 6 = 15
x	x	x	+	6	(x) (x) + 6	(x) (x)	+ 6	(x) (x) + 6 = x^2 + 6

Fase 3:

1) Si a cada figura de la secuencia inicial se le aumenta una cantidad "y" de



c. Completa la tabla en base a las figuras construidas

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1 +	Y	(1)(1+1)	(1)(1)	(1)(1)	(1)(1) + (1)(1)
2	2	2 +	Y	(2)(2+1)	(2)(2)	(2)(1)	(2)(2) + (2)(1)
3	3	3 +	Y	(3)(3+1)	(3)(3)	(3)(1)	(3)(3) + 3(1)
4	4	4 +	y	(4)(4+1)	(4)(4)	(4)(1)	(4)(4) + (4)(1)

d. ¿Qué significa aumentar "y" unidades a la base?

Que aumenta un numero desconocido

e. ¿Qué relación existe entre las columnas del área ?

Que se complementan y forman la ecuación final.

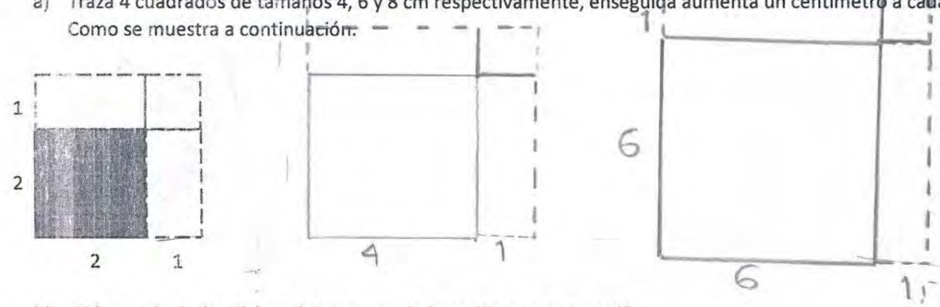
f. ¿Existe la misma relación entre la información contenida en las tablas anteriores y la tabla del ejercicio anterior?

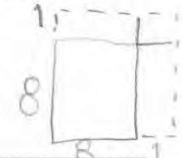
Equipo C

Actividad 2

Fase 1: Considerando la actividad anterior.

a) Traza 4 cuadrados de tamaños 4, 6 y 8 cm respectivamente, enseguida aumenta un centímetro a cada lado. Como se muestra a continuación.





b) ¿Cómo calcularías el área únicamente de la región que aumentó?

Multiplicando la base x1 que es lo que aumenta. $(2*1)^2+(1)(1)$.

c) Con base en las figuras y considerando la pregunta anterior, completa la siguiente tabla.

Figura	Altura		Base		Área	Área Inicial	+	Aumento de Área	Área Total
	Original	Aumento	Original	Aumento	(Altura + aumento)(Base + aumento)				
1	1	+ 1	1	+ 1			+		
2	2	+ 1	2	+ 1			+		
3	3	+ 1	3	+ 1			+		
4	4	+ 1	4	+ 1			+		

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la serie?

$A=(x)(x)+(x*1)^2+1.$

e) Si en lugar de aumentar 1 cm, aumentamos 2 centímetros a la base y a la altura, completa la tabla.

Figura	Altura		Base		Área	Área Inicial	+	Aumento de Área	Área Total
	Original	Aumento	Original	Aumento	(Altura + aumento)(Base + aumento)				
1	1	+ 2	1	+ 2			+		
2	2	+ 2	2	+ 2			+		
3	3	+ 2	3	+ 2			+		
4	4	+ 2	4	+ 2			+		

f) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la tabla anterior?

$A=(x)(x)+(x+2)^2+2$

g) Si el aumento fuese de 6 cm a la base y a la altura, ¿cómo quedaría la expresión algebraica para calcular el área?

Equipo D

César Alejandro Simón Ortíz
Fernando Daniel Solís
Uzziel Reyna Mendoza

Equipo D

Equipo: Los Patogallina

Fase 1: Analiza la siguiente secuencia de cuadrados y completa la tabla:

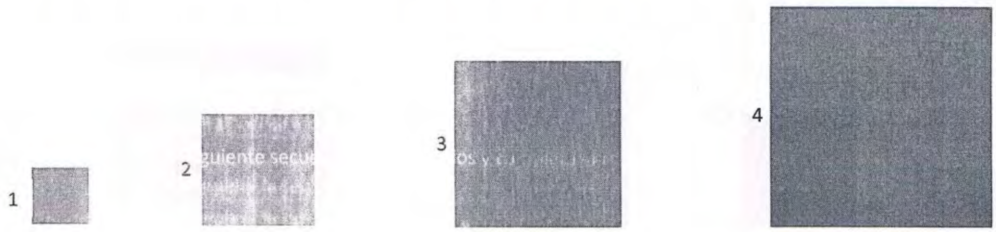


Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Área: Representada como exponente
1	1		(1)(1)	1^2
2	2	2	(2)(2)	2^2
3	3	3	(3)(3)	3^2
4	4	4	(4)(4)	4^2

Nota: Recuerda que los exponentes se utilizan para indicar cuántas veces se multiplica por sí mismo un número.

Si se continúa con la construcción de figuras:

1) ¿Cuáles serían las dimensiones y el área de la figura 10?

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Área: Representada como exponente
10	10	10	(10)(10)	10^2

2) ¿Cuáles serían las dimensiones de la figura 40 y la figura 100?

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Representada como exponente
40	40	40	(40)(40) = 1600	40^2
100	100	100	(100)(100) = 10000	100^2

3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura?, representa esta situación.

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Expresión Algebraica
x	a	a	(a)(a)	$x = a^2$

Fase 2: Si a la secuencia de figuras anterior, se le aumenta un centímetro a la base, se puede obtener la siguiente secuencia de figuras. En base a ellas completa la tabla. (Se recomienda llenar la ta[illegible] [illegible]camente representando la operación).

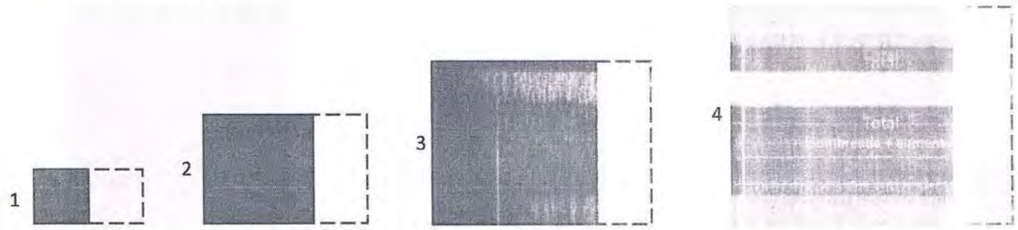


Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1 +	1	(1) (1+1)	(1)(1)	1	(1)(2)
2	2	2 +	1	(2) (2+1)	(2)(2)	1	(2)(3)
3	3	3 +	1	(3) (3+1)	(3)(3)	1	(3)(4)
4	4	4 +	1	(4) (4+1)	(4)(4)	1	(4)(5)

Si se continúa con la construcción de figuras:

1) ¿Cuáles serían las dimensiones y el área de la figura 10?

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
10	10	10	1	(10)(10+1)	(10)(10)	+1	(10)(11)

2) ¿Cuáles serían las dimensiones de la figura 45 y la figura 150?

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
45	45	45 +	1	(45)(45+1)	(45)(45)	1	(45)(46)
150	150	150 +	1	(150)(150 +1)	(150)(150)	1	(150)(156)

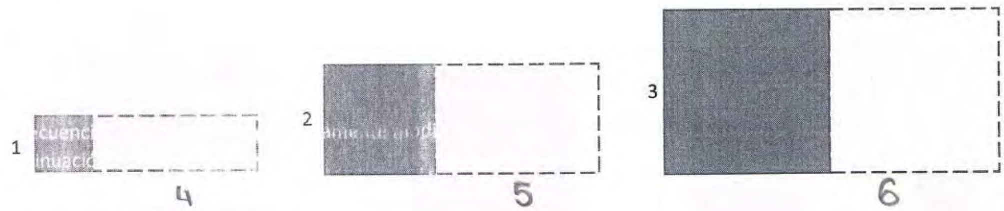
3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura en esta secuencia?,

$x = (a)(b+1) = (a)(b) + 1 =$

4) ¿Qué relación existe entre las áreas que obtuviste en la fase 1 y la fase 2?

Que en el problema 1 el area es la de un Cuadrado y es menor y en el problema 2 Cambia el area por que se le aumenta 1.

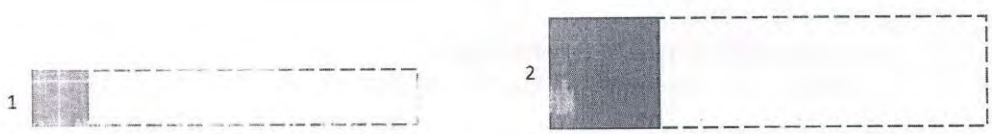
La secuencia de figuras inicial es nuevamente modificada para aumentar 3 centímetros a la base, como se muestra a continuación:



a. Completa la tabla.

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	+ Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes		Total (Sombreada + aumento)
					Parte Sombreada	Parte que aumento	
1	1	1	+ 3	(1)(1+3)	(1)(1)	(1)(3)	
2	2	2	+ 3	(2)(2+3)	(2)(2)	(2)(3)	(2)(5)
3	3	3	+ 3	(3)(3+3)	(3)(3)	(3)(3)	(3)(6)
x	x	x	+ 3	(x)(x+3)	(x)(x)	(x)(3)	(x)(x+3)

Si a cada figura de la secuencia inicial le aumento 6 cm a la base original:

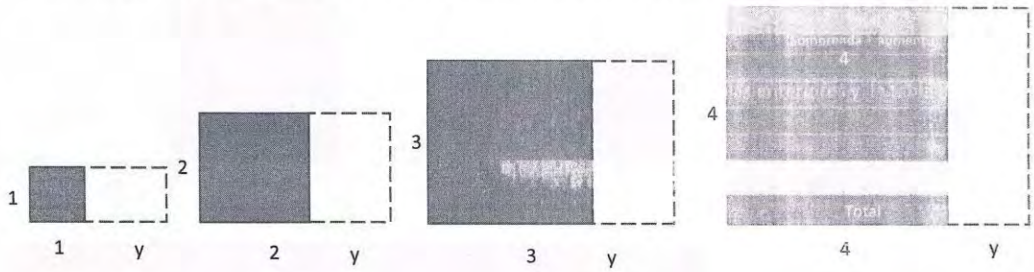


b. Completa la tabla en base a las figuras construidas

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes		Total (Sombreada + aumento)
					Parte Sombreada	Parte que aumento	
1	1	1	+ 6	(1)(1+6)	(1)(1)	(1)(6)	(1)(7)
2	2	2	+ 6	(2)(2+6)	(2)(2)	(2)(6)	(2)(8)
3	3	3	+ 6	(3)(3+6)	(3)(3)	(3)(6)	(3)(9)
x	x	x	+ 6	(x)(x+6)	(x)(x)	(x)(6)	(x)(x+6)

Fase 3:

1) Si a cada figura de la secuencia inicial se le aumenta una cantidad “y” de



c. Completa la tabla en base a las figuras construidas

Figura	Altura	Base		Área			
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1	+ Y	(1)(1+Y)	(1)(1)	(1)(Y)	(1)(1+Y)
2	2	2	+ Y	(2)(2+Y)	(2)(2)	(2)(Y)	(2)(2+Y)
3	3	3	+ Y	(3)(3+Y)	(3)(3)	(3)(Y)	(3)(3+Y)
4	4	4	+ y	(4)(4+Y)	(4)(4)	(4)(Y)	(4)(4+Y)

d. ¿Qué significa aumentar “y” unidades a la base?

Que se aumenta una cantidad desconosida

e. ¿Qué relación existe entre las columnas del área ?

Que la parte “y” tendra la misma altura que la parte sombreada

f. ¿Existe la misma relación entre la información contenida en las tablas anteriores y la tabla del ejercicio anterior?

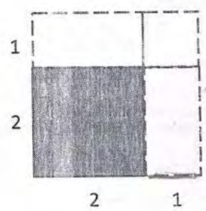
Si, la relacion que existe entre estas tablas Es de que va aumentando, pero en este caso se desconoce el aumento y no los ponen como una variable “y”

Equipo D

Actividad 2

Fase 1: Considerando la actividad anterior.

a) Traza 4 cuadrados de tamaños 4, 6 y 8 cm respectivamente, enseguida aumenta un centímetro a cada lado. Como se muestra a continuación.



b) ¿Cómo calcularías el área únicamente de la región que aumentó?

$((x)(1))(2)+1=$

c) Con base en las figuras y considerando la pregunta anterior, completa la siguiente tabla.

Figura	Altura			Base			Área (Altura + aumento)(Base + aumento)	Área Inicial	+	Aumento de Área	Área Total
	Original		Aumento	Original		Aumento					
1	2	+	1	2	+	1	(2+1)(2+1)	4	+	5	9
2	4	+	1	4	+	1	(4+1) (4+1)	16	+	5	21
3	6	+	1	6	+	1	(6+1) (6+1)	36	+	5	41
4	8	+	1	8	+	1	(8+1)(8+1)	64	+	5	69

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la serie?

$(x+1)(x+1)$ ó $(x+1)^2$

e) Si en lugar de aumentar 1 cm, aumentamos 2 centímetros a la base y a la altura, completa la tabla.

Figura	Altura			Base			Área (Altura + aumento)(Base + aumento)	Área Inicial	+	Aumento de Área	Área Total
	Original		Aumento	Original		Aumento					
1	2	+	2	2	+	2	(2+2) (2+2)	4	+	9	13
2	4	+	2	4	+	2	(4+2) (4+2)	16	+	9	25
3	6	+	2	6	+	2	(6+2) (6+2)	36	+	9	45
4	8	+	2	8	+	2	(8+2) (8+2)	64	+	9	73 :)

f) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la tabla anterior?

$(x+2)(x+2)$ ó $(x+2)^2$

g) Si el aumento fuese de 6 cm a la base y a la altura, ¿cómo quedaría la expresión algebraica para calcular el área?

$(x+6)(x+6)$ ó $(x+6)^2$

h) Y si fuese de 10 cm, 20 y 100 ¿cómo quedarían las expresiones?

$(x+10)(x+10)$ o $(x+10)^2$ $(x+20)^2$ $(x+100)^2$

i) Si el cuadrado inicial tiene como medida de un lado "x" y se le aumenta "y" a cada lado:

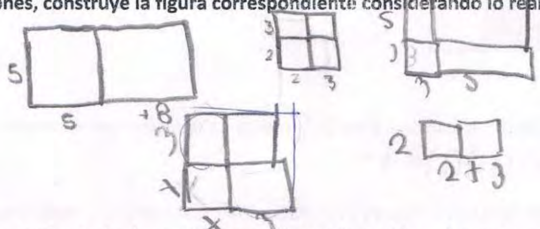
a. ¿Cuál es la expresión que representa el área de la figura? $(x+y)^2$

b. ¿Qué proceso seguiste para obtener el área? $(x+y)^2$

c. ¿Qué representan las literales utilizadas en las medidas? Que no se sabe el numero

Fase 2: A partir de las siguientes expresiones, construye la figura correspondiente considerando lo realizado en las actividades anteriores y obtén el área.

1) (2)(2 + 3) $=(2)(5)=10$
2) (5)(5 + 8) $=65$
3) (2 + 3)(2 + 3) $=25$
4) (3 + 5)(3 + 5) $=64$
5) (x+3)(x+3) $=(x+3)^2$



a) Si no tuvieras que construir las figuras, ¿qué estrategia seguirías para determinar el área de una manera rápida y sencilla?, descríbela.

Nadamas tendriamos que hacer la operacion de dicha figura...

b) Pon aprueba tu estrategia y obtén el área de las siguientes figuras:

- (x)(x+3) $(x)(x+3)$
- (x+2)(x+2) $(x+2)$
- (x+6)(x+6) $(x+6)^2$

Equipo E

Integrantes:
Juan Carlos Benitez Rodriguez
Roman Islas Montes
Brayan Arturo Angeles Hdez.

Equipo E

Fase 1: Analiza la siguiente secuencia de cuadrados y completa la tabla:

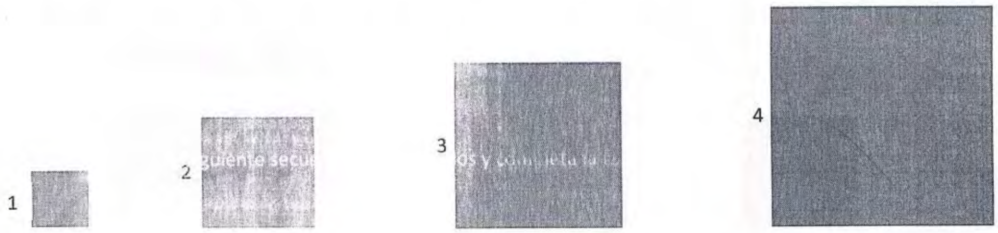


Figura	Altura	Base	Área	
			(Altura)(Base)	Representada como exponente
1	1	1	(1)(1)	1^2
2	2	2	(2)(2)	2^2
3	3	3	(3)(3)	3^2
4	4	4	(4)(4)	4^2

Nota: Recuerda que los exponentes se utilizan para indicar cuántas veces se multiplica por sí mismo un número.

Si se continúa con la construcción de figuras:

1) ¿Cuáles serían las dimensiones y el área de la figura 10?

Figura	Altura	Base	Área	
			(Altura)(Base)	Representada como exponente
10	10	10	(10)(10)	10^2

2) ¿Cuáles serían las dimensiones de la figura 40 y la figura 100?

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Representada como exponente
40	40	40	(40)(40)	40^2
100	100	100	(100)(100)	100^2

3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura?, representa esta situación.

Figura	Altura	Base	Área (Altura)(Base)	Expresión Algebraica
x	x	x	(x)(x)	x^2

Fase 2: Si a la secuencia de figuras anterior, se le aumenta un centímetro a la base, se puede obtener la siguiente secuencia de figuras. En base a ellas completa la tabla. (Se recomienda llenar la tabla sin hacer cálculos, únicamente representando la operación).

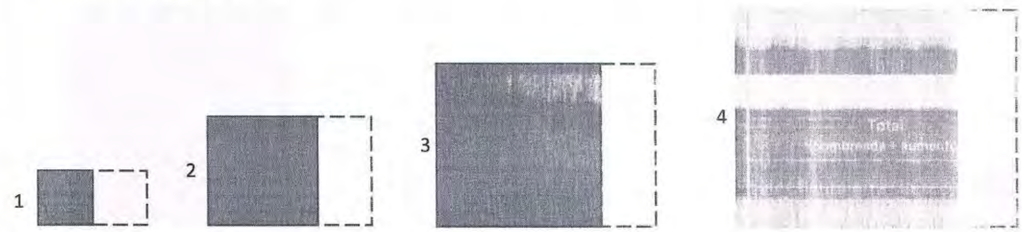


Figura	Altura	Base Original	Base Aumento	Área (Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1 +	1	(1)(1+1)	(1)(1)	(1)(1)	(1)(1) + (1)(1)
2	2	2 +	1	(2)(2+1)	(2)(2)	(2)(1)	(2)(2) + (2)(1)
3	3	3 +	1	(3)(3+1)	(3)(3)	(3)(1)	(3)(3) + (3)(1)
4	4	4 +	1	(4)(4+1)	(4)(4)	(4)(1)	(4)(4) + (4)(1)

Si se continúa con la construcción de figuras:

1) ¿Cuáles serían las dimensiones y el área de la figura 10?

Figura	Altura	Base Original	Base Aumento	Área (Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
10	10	10 + 1		(10)(10+1)	(10)(10)	(10)(1)	10^2 + (10)(1)

2) ¿Cuáles serían las dimensiones de la figura 45 y la figura 150?

Figura	Altura	Base Original	Base Aumento	Área (Altura)(Base+aumento)	Área por partes: Parte Sombreada	Área por partes: Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
45	45	45+1		(45)(45+1)	(45)(45)	(45)(1)	45^2 + (45)(1)
150	150	150+1		(150)(150+1)	(150)(150)	(150)(1)	150^2 + (150)(1)

3) ¿Cuál sería la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura en esta secuencia?,

$(x^2)(x+1)$

4) ¿Qué relación existe entre las áreas que obtuviste en la fase 1 y la fase 2?

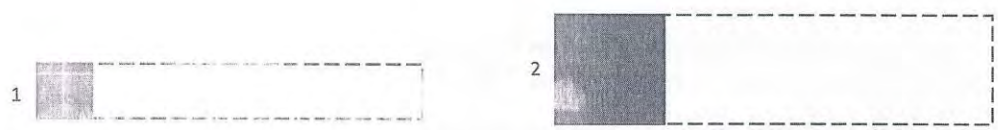
Las partes sombreadas en ambas fases son iguales, pero en la fase 2 se le agrega un aumento de una unidad en la base de todas las figuras.

La secuencia de figuras inicial es nuevamente modificada para aumentar 3 centímetros a la base, como se muestra a continuación:

a. Completa la tabla.

Figura	Altura	Base		Área			
					Área por partes		Total
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Parte Sombreada	Parte que aumento	(Sombreada + aumento)
1	1	1 +	3	(1) (1+3)	(1) (1)	(1) (3)	(1^2) + (1) (3)
2	2	2 +	3	(2) (2+3)	(2) (2)	(2) (3)	(2^2) + (2) (3)
3	3	3 +	3	(3) (3+3)	(3) (3)	(3) (3)	(3^2) + (3) (3)
x	x	x +	3	(x) (x+3)	(x) (x)	(x) (3)	(x^2) + 3x

Si a cada figura de la secuencia inicial le aumento 6 cm a la base original:

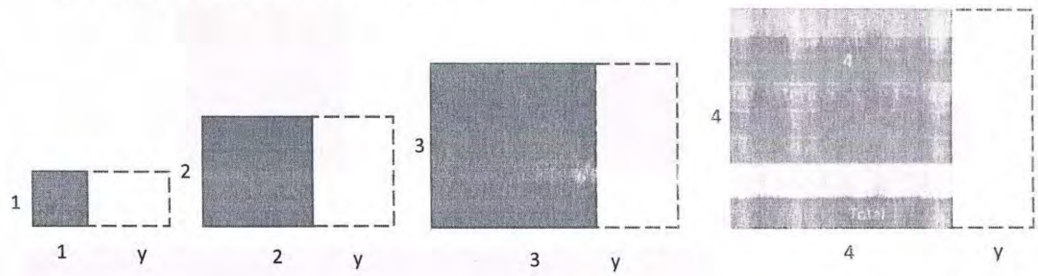


b. Completa la tabla en base a las figuras construidas

Figura	Altura	Base		Área			
					Área por partes		Total
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Parte Sombreada	Parte que aumento	(Sombreada + aumento)
1	1	1 +	6	(1) (1+6)	(1) (1)	(1) (6)	(1^2) + (1) (6)
2	2	2 +	6	(2) (2+6)	(2) (2)	(2) (6)	(2^2) + (2) (6)
3	3	3 +	6	(3) (3+6)	(3) (3)	(3) (6)	(3^2) + (3) (6)
x	x	x +	6	(x) (x+6)	(x) (x)	(x) (6)	x^2 + 6x

Fase 3:

1) Si a cada figura de la secuencia inicial se le aumenta una cantidad "y" de



c. Completa la tabla en base a las figuras construidas

Figura	Altura	Base		Área			
					Área por partes		
		Original	Aumento	(Altura)(Base+aumento)	Parte Sombreada	Parte que aumento	Total (Sombreada + aumento)
1	1	1 +	Y	(1)(1+y)	(1)(1)	(1)(y)	$(1^2)+y$
2	2	2 +	Y	(2)(2+y)	(2)(2)	(2)(y)	$(2^2)+2y$
3	3	3 +	Y	(3)(3+y)	(3)(3)	(3)(y)	$(3^2)+3y$
4	4	4 +	y	(4)(4+y)	(4)(4)	(4)(y)	$(4^2)+4y$

d. ¿Qué significa aumentar "y" unidades a la base?

Que tiene un aumento variable

e. ¿Qué relación existe entre las columnas del área ?

Representan el área pero de diferentes maneras.

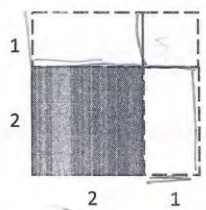
f. ¿Existe la misma relación entre la información contenida en las tablas anteriores y la tabla del ejercicio anterior?

Si

Actividad 2

Fase 1: Considerando la actividad anterior.

a) Traza 4 cuadrados de tamaños 4, 6 y 8 cm respectivamente, enseguida aumenta un centímetro a cada lado. Como se muestra a continuación.



b) ¿Cómo calcularías el área únicamente de la región que aumentó?

Obtenemos el area total y despues restamos el area sombreada.

c) Con base en las figuras y considerando la pregunta anterior, completa la siguiente tabla.

Figura	Altura			Base			Área (Altura + aumento)(Base + aumento)	Área Inicial	+	Aumento de Área	Área Total
	Original		Aumento	Original		Aumento					
1	2	+	1	2	+	1	$(2+1)(2+1)$		+		$(2)^2+(2)(1)+(2)(1)+(1)^2$
2	4	+	1	4	+	1	$(4+1)(4+1)$		+		$(4)^2+(4)(1)+(4)(1)+1^2$
3	6	+	1	6	+	1	$(6+1)(6+1)$		+		$(6)^2+(6)(1)+(6)(1)+1^2$
4	8	+	1	8	+	1	$(8+1)(8+1)$		+		$(8)^2+(8)(1)+(8)(1)+1^2$

$(x^2)+2(x)(1)+$

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la serie?

$(x+1)^2$

e) Si en lugar de aumentar 1 cm, aumentamos 2 centímetros a la base y a la altura, completa la tabla.

Figura	Altura			Base			Área (Altura + aumento)(Base + aumento)	Área Inicial	+	Aumento de Área	Área Total
	Original		Aumento	Original		Aumento					
1	2	+	2	2	+	2	$(2+2)(2+2)$		+		$(2^2)+(2)(2)+(2)(2)+(2)^2$
2	4	+	2	4	+	2	$(4+2)(4+2)$		+		$(4^2)+(4)(2)+(4)(2)+(2)^2$
3	6	+	2	6	+	2	$(6+2)(6+2)$		+		$(6^2)+(6)(2)+(6)(2)+(2)^2$
4	8	+	2	8	+	2	$(8+2)(8+2)$		+		$(8^2)+(8)(2)+(8)(2)+2^2$

$(x^2)+2(x)(2)+2^2$

f) ¿Cuál es la expresión algebraica que me permite calcular el área de cualquier figura de la tabla anterior?

$(x+2)^2$

g) Si el aumento fuese de 6 cm a la base y a la altura, ¿cómo quedaría la expresión algebraica para calcular el área?

$(x+6)^2$

h) Y si fuese de 10 cm, 20 y 100 ¿cómo quedarían las expresiones?

$(x+10)^2$, $(x+20)^2$, $(x+100)^2$

i) Si el cuadrado inicial tiene como medida de un lado "x" y se le aumenta "y" a cada lado:

a. ¿Cuál es la expresión que representa el área de la figura? $(x+y)^2$

b. ¿Qué proceso seguiste para obtener el área? Multiplicamos cada lado por si mismo

c. ¿Qué representan las literales utilizadas en las medidas? Las medidas de los lados que van variando en cada ejercicio

Fase 2: A partir de las siguientes expresiones, construye la figura correspondiente considerando lo realizado en las actividades anteriores y obtén el área.

1) (2)(2 + 3) $= 4+6=10$
2) (5)(5 + 8) $= 25+40=65$
3) (2 + 3)(2 + 3) $= 4+6+6+9=25$
4) (3 + 5)(3 + 5) $= 9+15+15+25=64$
5) (x+3)(x+3) $= x^2+3x+3x+9 = x^2+6x+9$ $\quad x=2$
$2^2+6(2)+9=25$

a) Si no tuvieras que construir las figuras, ¿qué estrategia seguirías para determinar el área de una manera rápida y sencilla?, descríbela.

Le asignaría un valor a 2 literales y las multiplicaría por si mismos

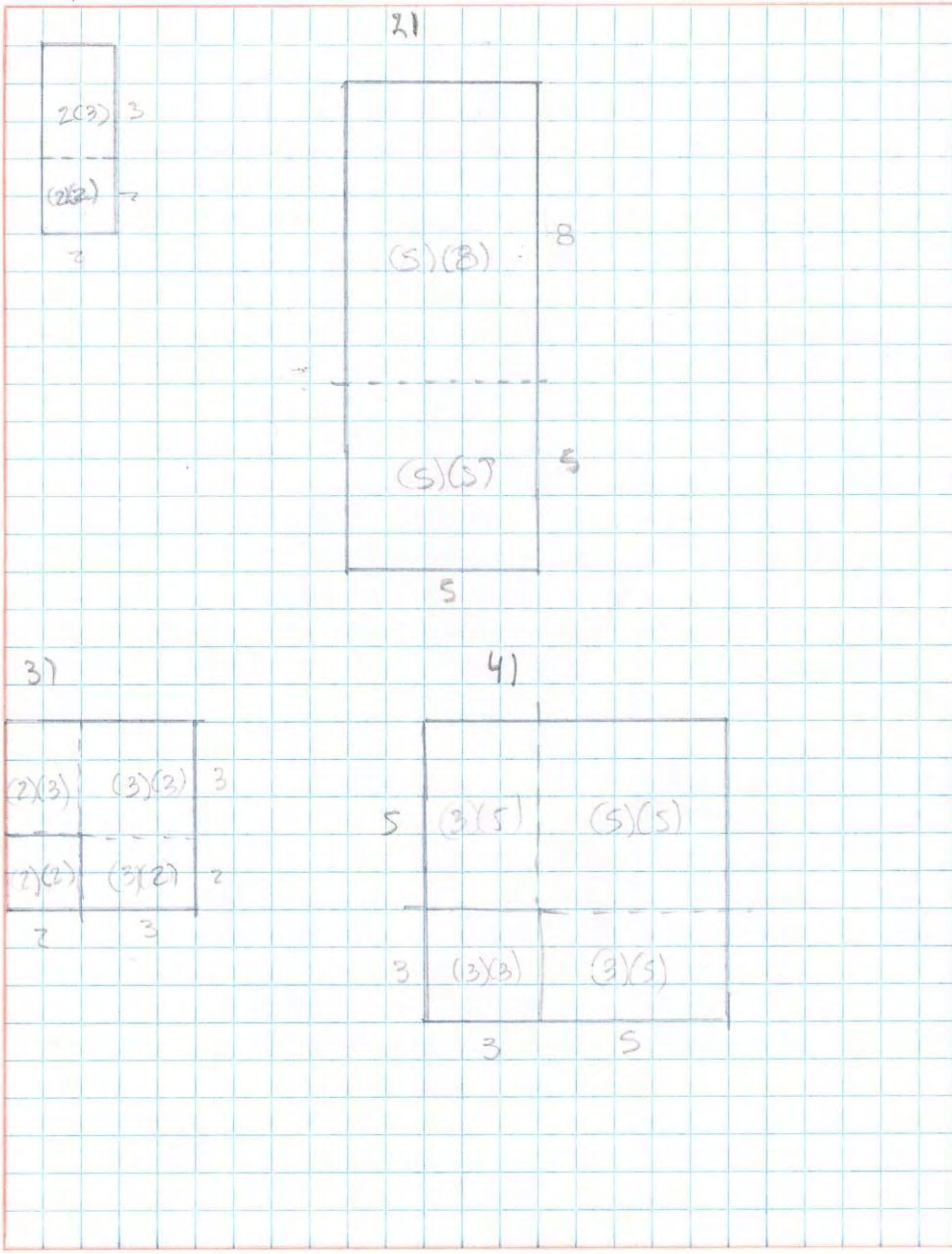
b) Pon aprueba tu estrategia y obtén el área de las siguientes figuras:

- (x)(x+3) $= x^2+3x$
- (x+2)(x+2) $= x^2+2x+2x+4 = x^2+4x+4$
- (x+6)(x+6) $= x^2+6x+6x+36 = x^2+12x+36$

PAG.
DIA MES AÑO

Benitez Rodrigues Juan Carlos
Islas montes Roman
Angeles Hdez Brayan Arturo

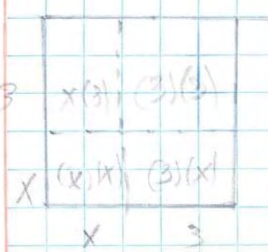
1) Fase 2



PAG. ____

DIA MES AÑO

5)



Juan Carlos Benitez Rodriguez
Roman Islas Montes
Brayan Arturo Angeles Hernandez.

Area inicial	Aumento de orza
2^2	$(2)(2)+(2)(2)+(2)^2$
4^2	$(4)(2)+(4)(2)+(2)^2$
6^2	$(6)(2)+(6)(2)+(2)^2$
8^2	$(8)(2)+(8)(2)+(2)^2$

PAG. ____

DIA MES AÑO

Área Inicial	+	Aumento de Área
2^2	+	$(2)(1)+(2)(1)+1^2$
4^2	+	$(4)(1)+(4)(1)+1^2$
6^2	+	$(6)(1)+(6)(1)+1^2$
8^2	+	$(8)(1)+(8)(1)+(1^2)$
	+	
	+	

Integrantes

Brayan Arturo Angeles Hdez
Juan Carlos Benitez Rodriguez
Roman Islas Montes