Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Puntos de no corte, orilla, no bloque y z-puntos

Tesis que para obtener el título de

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

presenta

Ana Luisa Ramírez Bautista

bajo la dirección de la

Dra. Rocío Leonel Gómez

Pachuca, Hidalgo, Agosto de 2017

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Institute of Basic Sciences and Engineering

Área Académica de Matemáticas y Física
Mathematics and Physics Department

Ana Luisa Ramírez Bautista
P R E S E N T E

Por este conducto le comunico que el Jurado que le fue asignado a su trabajo de tesis titulado *Puntos de no corte, orilla, no bloque y z-puntos*, después de revisarlo en reunión han decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.
A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

Presidente: Dr. Federico Menéndez-Conde Lara

Secretario: Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz

Primer Vocal: Dr. Rafael Villarroel Flores

Segundo Vocal: Dr. Raúl Temoltzi Ávila

Tercer Vocal: Dra. Rocío Leonel Gómez

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"
Mineral de la Reforma, Hidalgo, a 6 de julio de 2017

Dr. Rafael Villarroel Flores
Secretario del Comité de Titulación
de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca – Tulancingo Km. 4.5
Colonia Carboneras
Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184
Tel. +52 771 7172000 exts. 6164, Fax 2109
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx

www.uaeh.edu.mx

Resumen

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío, un subcontinuo es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de un continuo. Dado un continuo X y un punto p de X diremos que:

• p es un punto de no corte si el complemento es conexo.
• p es un punto orilla si para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un subcontinuo que no contenga a p y se encuentre a distancia menor que ε de X con respecto a la métrica de Hausdorff.
• p es un punto de no bloque si existe una sucesión creciente de subcontinuos tal que cada elemento de la sucesión no contenga a p y la unión sea densa en X.
• p es un z-punto si para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua cuya imagen no contiene a p y tal que la distancia de cualquier punto a su imagen sea menor a ε.

En topología, en particular en la teoría de los continuos, es útil distinguir ciertas clases de puntos en un espacio dado. En este trabajo estudiaremos las cuatro clases de puntos antes mencionadas. Daremos ejemplos donde aparecen estos puntos, así como ejemplos donde no aparecen. También presentamos algunos resultados relacionados con la existencia y localización de estos puntos, así como las relaciones que existen entre ellos.

Abstract

A continuum means a compact, connected and metric space. A subcontinuum of a space X is a subspace of X which is itself a continuum. Let X be a continuum an p a point of X, we say that:

• p is a non-cut point of X if $X - \{p\}$ is connected.
• p is a shore point of X if for each $\varepsilon > 0$ there is a subcontinuum C of X such that $C \cap \{p\} = \emptyset$ and the Hausdorff distance between C and X is less than ε.
• p is a non-block point of X if there is an increasing succession of subcontinua contained in $X - \{p\}$ whose union is dense in X.
• p is a z-point of X if for each $\varepsilon > 0$ there is a function f of X onto $X - \{p\}$ such that for each $x \in X$ the distance between x and its image $f(x)$ is less than ε.

In topology, particularly in continuum theory, it is often required to distinguish specific class of points in the given space. In this work we will study the four classes of points mentioned above. We will give examples where these points do exist as well as examples where they don't. Also we present some results related to the existence and location of thes points, as well as the relations among them.

Dedicatoria

En memoria de mis padres.

"Las personas con las que compartes tu vida, te marcan y aunque ya no están contigo una parte de ellos siempre permanecerá en tu corazón".

Agradecimientos

Quiero agradecer a cada uno de mis hermanos: Raquel, Javier, Fernando, Magis e Israel, por haber creído siempre en mi y apoyarme en los momentos más difíciles de mi vida y de mi carrera, por el orgullo que sé que tienen de mi. Gracias por darle el verdadero significado a la familia, los quiero con todo mi corazón.

A mis profesores, por toda la paciencia que me dieron durante mi estancia en la UAEH, agradezco su apoyo y consejos.

A los Doctores: Federico Menéndez-Conde Lara, Benjamín Alfonso Itzá Ortiz, Rafael Villarroel Flores y Raúl Temoltzi Ávila, integrantes del comité revisor de tesis, por las observaciones, comentarios y sugerencias que me hicieron mejorar el presente trabajo.

Sobre todo agradezco a mi asesora, la Dra. Rocío Leonel Gómez por la dirección de este trabajo, por la paciencia que me tuvo y por todo el conocimiento que sin duda me proporcionó. Porque desde que la conocí ha sido un ejemplo y una motivación para mi desarrollo en las matemáticas inspirandome a ser mejor cada día. Gracias!

Contenido

Nada es demasiado pequeño para comprenderlo plenamente y nada es tan grande que no pueda ser intentado.

William V. Horne.

Introducción

La teoría de continuos es una rama de la topología que apareció aproximadamente en la década comprendida entre 1910 y 1920 en la que se estudian entre otros temas a los continuos e hiperespacios. Por un continuo entenderemos un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un subcontinuo es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de un continuo y un hiperespacio es cualquier colección de subconjuntos de un continuo que satisfacen cierta propiedad topológica. En particular, nosotros trabajaremos con los hiperespacios 2^X y $C(X)$ que son el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados de X y el conjunto de todos los subcontinuos de X, respectivamente.

El estudio de los continuos se ha realizado a través de varias técnicas, una de ellas es estudiar las propiedades que tienen sus puntos, es por ello que este trabajo se enfocará en estudiar los puntos de no corte, orilla, no bloque y z-puntos de un continuo.

Un poco de historia acerca de la aparición de estos puntos es la siguiente. R.L Moore demostró que cada continuo no degenerado tiene dos o más puntos de no corte, [15]. Los puntos orilla fueron introducidos por L. Montejano, V. Neumann-Lara e I. Puga como un fortalecimiento de la noción de un punto de no corte y fueron utilizados en su estudio de dendritas, [14], [18]. Recientemente, R. Leonel ha generalizado el resultado de Moore al mostrar que cada continuo no degenerado tiene dos o más puntos orilla, [12]. Bobok, Pyrih y Vejnar demuestran que cada continuo no degenerado contiene al menos dos puntos de no bloque que generaliza el resultado de R. Leonel, [4]. La noción de un z-conjunto fue desarrollada por D. Anderson desempeñando un papel importante en el auge de la topología de dimensión infinita en la década de 1970, [6], [1].

Nuestro objetivo es estudiar las propiedades y relaciones que hay entre los puntos de no corte, orilla, no bloque y z-puntos para un continuo. Ejemplificaremos estos puntos y caracterizaremos algunos continuos a través de estos puntos.

La estructura de nuestro trabajo es la siguiente. En el primer capítulo se encuentran los preliminares con definiciones y algunos resultados ya conocidos, dentro de la topología. El segundo capítulo contiene definiciones y resultados de teoría de continuos y sus hiperespacios con el objetivo de poder comprender el desarrollo de este trabajo.

En el tercer capítulo se dan a detalle las definiciones de los puntos que consideraremos en este trabajo; los puntos de no corte, orilla, no bloque y z-puntos. Así como ejemplos de cada uno de ellos. En la sección 3.1 se presentan algunos resultados acerca de los puntos de no corte; y se caracteriza a un arco como un continuo con sólo dos puntos de no corte (Teorema 3.1.9).

En la sección 3.2 se estudian los puntos orilla y con información recabada mostramos los siguientes resultados: Todo continuo tiene al menos dos puntos orilla (Teorema 3.2.4) y una condición para que un punto de un dendroide no sea punto orilla es que sea un centro fuerte (Proposición 3.2.7). Se localizan los puntos orilla en continuos irreducibles (Teorema 3.2.13). Se caracteriza a los continuos únicamente irreducibles, como continuos con sólo dos puntos orilla (Teorema 3.2.17). Además, se demuestra que un punto orilla de un continuo X es punto de no corte (Proposición 3.2.19) pero el recíproco no es cierto y mostramos un contraejemplo (Figura 4.4). Sin embargo, para los continuos localmente conexos se demuestra que los puntos orilla y no corte son equivalentes (Teorema 3.2.20).

Posteriormente, en la sección 3.3 se demuestra que todo continuo tiene al menos dos puntos de no bloque (Teorema 3.3.3) y al igual que los puntos orilla se localizan los puntos de no bloque en continuos irreducibles (Lema 3.3.4).

Los z-puntos son presentados en la sección 3.4. En este caso existen continuos que no tienen z-puntos como la circunferencia unitaria (S^1, Figura 2.3). Aunque no demostramos que la circunferencia no tiene z-puntos puesto que la demostración requiere de estudiar el grupo fundamental de la circunferencia damos una referencia que se puede utilizar para justificar este resultado, [11]. También se prueba que los únicos z-puntos de un arco son los puntos extremos (Proposición 3.4.3). El recíproco de este resultado no se cumple, como se puede observar en el continuo conocido como aceituna (Figura 4.2).

En el cuarto capítulo vemos la relación que existe entre los conjuntos $L(X)$, $O(X)$, $M(X)$ y $Z(X)$ que son los conjuntos de puntos de no corte, orilla, no bloque y z-puntos de un continuo respectivamente, la relación en la que nos enfocamos es la contención de conjuntos y como consecuencia de los teoremas de existencia para los puntos de no corte, orilla y no bloque se concluye que estos conjuntos nunca son vacíos. Las relaciones obtenidas entre estos conjuntos son las siguientes:

- $O(X) \subseteq L(X)$: Todo punto orilla de un continuo es un punto de no corte.
- $M(X) \subseteq O(X)$: Todo punto de no bloque de un continuo es un punto orilla.
- $Z(X) \subseteq O(X)$: Todo z-punto de un continuo es un punto orilla.
- $Z(X) \subseteq L(X)$: Todo z-punto de un continuo es punto de no corte.
- $M(X) \subseteq L(X)$: Todo punto de no bloque de un continuo es un punto de no corte.

Finalmente mostramos algunos ejemplos para los cuales el recíproco de cada de las contenciones anteriores no se cumple.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos algunas definiciones y resultados básicos para comprender este trabajo.

1.1 Propiedad del supremo y del ínfimo

Definición 1.1.1 *Sea R una relación en un conjunto X no vacío. Diremos que R es una* **relación de orden** *si tiene las siguientes propiedades para cualesquiera elementos $x, y, z \in X$:*

(1) comparabilidad: Si $x \neq y$, entonces xRy o yRx,

(2) no reflexividad: Ningún $x \in X$ verifica la relación xRx,

(3) transitividad: Si xRz y zRy, entonces xRy.

Si R es una relación de orden en X, a la pareja (X, R) le llamaremos **conjunto ordenado**.

Ejemplo: Consideremos la relación de orden en la recta real que consiste en los pares (x, y) de números reales tales que $x < y$, es una relación de orden llamada "orden usual".

El símbolo "$<$", se utiliza generalmente para representar una relación de orden. A partir de esta notación, las propiedades de una relación de orden se convierten en:

(1) si $x \neq y$, entonces $x < y$ o $y < x$,

(2) si $x < y$, entonces $x \neq y$,

(3) si $x < z$ y $z < y$, entonces $x < y$.

Utilizaremos la notación $x \leq y$ para representar el enunciado "bien $x < y$, bien $x = y$".

Definición 1.1.2 *Sea X un conjunto ordenado por la relación "$<$" y sea $A \subseteq X$. Diremos que b es el* **máximo** *de A si $b \in A$ y si $x \leq b$ para todo $x \in A$.*

Definición 1.1.3 *Sea X un conjunto ordenado por la relación "$<$" y sea $A \subseteq X$. Diremos que a es el* **mínimo** *de A si $a \in A$ y si $a \leq x$ para todo $x \in A$.*

Podemos observar que un conjunto tiene, a lo más, un máximo y un mínimo.

Ejemplo: Si $A = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ con el orden usual, entonces 0 y 1 son el mínimo y el máximo de A, respectivamente.

Definición 1.1.4 *Sea X un conjunto ordenado por la relación "$<$" y sea $A \subseteq X$. Diremos que el subconjunto A está* **acotado superiormente** *si existe un elemento $b \in X$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in A$; el elemento b se denomina* **cota superior** *de A. Si el conjunto de todas las cotas superiores de A tiene un mínimo, ese elemento se denomina* **supremo de** *A y lo denotaremos por* $\sup(A)$*.*

El supremo de un conjunto A puede pertenecer o no a A. Si pertenece, es el máximo de A.

Definición 1.1.5 *Sea X un conjunto ordenado por la relación "$<$" y sea $A \subseteq X$. Diremos que el subconjunto A está* **acotado inferiormente** *si existe un elemento $a \in X$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in A$; el elemento a se denomina* **cota inferior** *de A. Si el conjunto de todas las cotas inferiores de A tiene un máximo, ese elemento se denomina* **ínfimo de** *A y lo denotaremos por* $\inf(A)$*.*

El ínfimo de un conjunto A puede pertenecer o no a A. Si pertenece, es el mínimo de A.

Definición 1.1.6 *Un conjunto ordenado X se dice que tiene la* **propiedad del supremo** *si todo subconjunto no vacío A de X que esté acotado superiormente tiene supremo.*

Ejemplos:

1. Si $X = (-1, 1)$ con el orden usual, entonces X tiene la propiedad del supremo.

2. Si $X = (-1, 0) \cup (0, 1)$ con el orden usual. Veamos que X no tiene la propiedad del supremo. Consideremos $A = \left\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ de X, este conjunto está acotado superiormente en X por cualquier elemento del conjunto $(0, 1)$, pero no tiene supremo en X.

Definición 1.1.7 *Un conjunto ordenado X se dice que tiene la* **propiedad del ínfimo** *si todo subconjunto no vacío A de X que esté acotado inferiormente tiene ínfimo.*

Ejemplos:

1. Si $X = (-1, 1)$ con el orden usual, entonces X tiene la propiedad del ínfimo.
2. Si $X = (-1, 0) \cup (0, 1)$ con el orden usual, entonces X no tiene la propiedad del ínfimo. Consideremos $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ de X, este conjunto está acotado inferiormente en X por cualquier elemento del conjunto $(-1, 0)$, pero no tiene ínfimo en X.

Definición 1.1.8 *(Operación aritmética con conjuntos) Sean A, B subconjuntos de los números reales. Entonces*

$$A + B := \{c \in \mathbb{R} : \textit{existen } a \in A \textit{ y } b \in B \textit{ tales que } c = a + b\}.$$

Lema 1.1.9 *Sean A, B subconjuntos no vacíos y acotados inferiormente de los números reales. Entonces $A + B$ también está acotado inferiormente y además* ínf $(A + B) =$ ínf *(A)* + ínf*(B).*

Demostración.

Como $A, B \subset \mathbb{R}$ son no vacíos y acotados inferiormente, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha = \inf(A)$ y $\beta = \inf(B)$. Así, $\alpha \leq a$ para cada $a \in A$ y $\beta \leq b$ para cada $b \in B$. Luego, $\alpha + \beta \leq a + b$ para cada $a \in A$ y $b \in B$. Por lo tanto, $A + B$ está acotado inferiormente por $\alpha+\beta$. Dado que $A+B$ está acotado inferiormente y no es vacío tiene un ínfimo, si consideramos $\gamma = \inf(A + B)$ se tiene que $\alpha + \beta \leq \gamma$, en consecuencia $\inf(A) + \inf(B) \leq \inf(A + B)$.
Sea $\varepsilon > 0$, consideremos $\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ y $\beta + \frac{\varepsilon}{2}$. Observemos que $\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ y $\beta + \frac{\varepsilon}{2}$ ya no son cotas inferiores, entonces existen $a' \in A$ y $b' \in B$ tales que $\alpha + \frac{\varepsilon}{2} > a'$ y $\beta + \frac{\varepsilon}{2} > b'$. Sumando estas desigualdades se tiene que $\alpha + \beta + \varepsilon > a' + b'$. Por otra parte, $\gamma \leq a' + b'$, ya que γ es el ínfimo de $A + B$. Luego $\alpha + \beta + \varepsilon > \gamma$, o bien $\alpha + \beta > \gamma - \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, así que $\alpha + \beta \geq \gamma$. Por lo tanto $\alpha + \beta = \gamma$, es decir, $\inf(A) + \inf(B) = \inf(A + B)$. ■

1.2 Espacios métricos

Definición 1.2.1 *Una* **métrica** *en un conjunto no vacío X es una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones: Para cualesquiera elementos $x, y, z \in X$:*

(1) $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Si d es una métrica en X, a la pareja (X, d) le llamaremos **espacio métrico**.

Ejemplo: La métrica usual en $\mathbb{R}$, donde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es definida por:

$$d(x, y) = \mid x - y \mid, \text{ para cada } x, y \in \mathbb{R}.$$

Verificaremos las tres condiciones de métrica tomando en cuenta las propiedades del valor absoluto.

(1) $\mid x - y \mid \geq 0$, entonces $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = \mid x - y \mid = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) $\mid x - y \mid = \mid y - x \mid$. Así, $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) $\mid x - y \mid = \mid x - z + z - y \mid \leq \mid x - z \mid + \mid z - y \mid$. Por lo tanto, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definición 1.2.2 *Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Definimos el conjunto*

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

y lo llamaremos **bola abierta** *de radio ε y centro en x.*

Definición 1.2.3 *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Diremos que A es* **abierto** *si para cada $a \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subseteq A$.*

Ejemplo: Las bolas abiertas en $\mathbb{R}$ con la métrica usual son los intervalos abiertos, $B_r(x) = (x - r, x + r)$. Sea $y \in B_r(x)$ queremos hallar $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y) \subset B_r(x)$. Consideremos $0 < \delta < r - d(x, y)$. Si $z \in B_\delta(y)$ entonces $d(z, y) < \delta$. Luego, $d(z, x) \leq d(z, y) + d(x, y) < (r - d(x, y)) + d(x, y) = r$ lo cual implica que $z \in B_r(x)$. Por lo tanto, $B_\delta(y) \subset B_r(x)$.

Definición 1.2.4 *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Definimos el* **diámetro** *de A como el sup $\{d(x, y) : x \in A,\ y \in A\}$ y lo denotaremos por* $\operatorname{diam}(A)$.

Ejemplo: Si $A = [0, 3] \times [0, 4] \subseteq \mathbb{R}^2$, el $\operatorname{diam}(A) = 5$.

Definición 1.2.5 *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$. Definimos y denotamos la distancia de x al conjunto A como*

$$d(x, A) = \mathit{inf}\, \{d(x, a) : a \in A\}.$$

Observemos que si $x \in A$, entonces $d(x, A) = 0$; pero el recíproco no es cierto en general. Puede que $d(x, A) = 0$ y $x \notin A$. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$ y $A = (a, b)$, entonces $d(a, A) = 0$, y sin embargo, $a \notin A$.

1.3 Espacios topológicos

Definición 1.3.1 *Una* **topología** *en un conjunto X es una familia $\mathfrak{T}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:*

(1) el conjunto $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathfrak{T}$,

(2) si $A, B \in \mathfrak{T}$, entonces $A \cap B \in \mathfrak{T}$,

(3) si $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{T}$, entonces $\displaystyle\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \in \mathfrak{T}$.

Si $\mathfrak{T}$ es una topología en X, a la pareja $(X, \mathfrak{T})$ le llamaremos **espacio topológico**, *y los elementos que pertenecen a $\mathfrak{T}$ reciben el nombre de* **subconjuntos abiertos** *de X. Diremos que X es un* **espacio topológico** *si tiene una topología.*

Ejemplo: Se sigue inmediatamente que si $X = \{1, 2, 3\}$, entonces $\mathfrak{T}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}\}$ es una topología para X, pero $\mathfrak{T}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$ no es una topología pues $\{1\} \cup \{2\} \notin \mathfrak{T}_2$.

Teorema 1.3.2 *Sea (X, d) un espacio métrico y sea*

$$\mathfrak{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : A \text{ es unión de bolas abiertas}\},$$

entonces $\mathfrak{T}_d$ es una topología en X.

Demostración.

(1) Como $\emptyset \in \mathfrak{T}_d$, $\emptyset$ es abierto. Luego, $X = \displaystyle\bigcup_{x\in X} B_1(x)$, así $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathfrak{T}_d$.

(2) Sean $A, B \in \mathfrak{T}_d$. Si $A \cap B = \emptyset$, por (1), $A \cap B \in \mathfrak{T}_d$. Si $A \cap B \neq \emptyset$, sea $x \in A \cap B$, entonces existen $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ tales que $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq A$ y $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq B$. Consideremos $\varepsilon = \text{mín}\,\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, entonces $B_\varepsilon(x) \subseteq A \cap B$, así $A \cap B \in \mathfrak{T}_d$.

(3) Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{T}_d$. Si $x \in \mathcal{A}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$, como A es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq A \subset \mathcal{A}$, así $\mathcal{A} \in \mathfrak{T}_d$.

■

A $\mathfrak{T}_d$ le llamaremos la topología en X inducida por la métrica d.

Ejemplo: En el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ la topología inducida por la métrica euclidiana $e(x, y) = |x - y|$ (topología usual) es

$$\mathfrak{T}_e = \{\emptyset\} \cup \{E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ es unión de algunos intervalos abiertos}\}.$$

Proposición 1.3.3 *Sea* $(X, \mathfrak{T})$ *un espacio topológico y sea* $Y \subseteq X$*. Consideremos el conjunto* $\mathfrak{T}|_Y = \{A \cap Y : A \in \mathfrak{T}\}$*, entonces* $\mathfrak{T}|_Y$ *es una topología en* Y*.*

Demostración.

(1) Como $\emptyset$ y $X \in \mathfrak{T}$ y dado que $\emptyset \cap Y = \emptyset$ y $X \cap Y = Y$, se tiene que $\emptyset$ y $Y \in \mathfrak{T}|_Y$.

(2) Sean $A, B \in \mathfrak{T}$, entonces $A \cap B \in \mathfrak{T}$ y $(A \cap Y) \cap (B \cap Y) = (A \cap B) \cap Y$, por lo que $(A \cap B) \in \mathfrak{T}|_Y$.

(3) Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{T}$. Como $\bigcup\{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\} = (\bigcup \mathcal{A}) \cap Y$, concluimos que $\bigcup \mathcal{A} \in \mathfrak{T}|_Y$.

■

A $\mathfrak{T}|_Y$ le llamaremos la topología relativa en Y con respecto a $(X, \mathfrak{T})$, y diremos que $(Y, \mathfrak{T}|_Y)$ es un subespacio de $(X, \mathfrak{T})$. A los elementos de $\mathfrak{T}|_Y$ les llamaremos abiertos relativos de Y.

Definición 1.3.4 *Sea* $(X, \mathfrak{T})$ *un espacio topológico. Una subcolección* $\mathcal{B}$ *de* $\mathfrak{T}$ *es una* **base** *para* $\mathfrak{T}$ *si para cada elemento* $A \in \mathfrak{T}$ *existe* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ *tal que* $A = \cup \mathcal{A}$*.*

Ejemplo: Podemos observar que $\mathfrak{T}$ misma es una base para $(X, \mathfrak{T})$. Así, por el Teorema 1.3.2 para un espacio métrico, $\mathcal{B}_d = \{B_\varepsilon(x) : x \in X, \varepsilon > 0\}$, es una base para $(X, \mathfrak{T}_d)$.

Definición 1.3.5 *Sean* $(X, \mathfrak{T})$ *un espacio topológico y* $x \in X$*. Un subconjunto* V *de* X *es una* **vecindad** *de* x *en* X *si existe* $A \in \mathfrak{T}$ *tal que* $x \in A \subseteq V$*. Denotaremos por* $\mathcal{V}(x)$ *a la colección de vecindades de* x *en* X*.*

Podemos observar que un conjunto abierto no vacío es vecindad de cada uno de sus puntos.

Ejemplo: Sea X un conjunto no vacío, se puede observar que si $\mathfrak{T} = \{\emptyset, X\}$, entonces $\mathfrak{T}$ es una topología para X y la única vecindad de cualquier elemento de X es X.

Proposición 1.3.6 *Sean* $(X, \mathfrak{T})$ *un espacio topológico y* A *un subconjunto de* X*. Entonces* A *es abierto si y sólo si para cada* x *en* A *existe* $V \in \mathcal{V}(x)$ *tal que* $V \subseteq A$*.*

Demostración.

$\Rightarrow|$ Supongamos que A es abierto. Sea $x \in A$, como $A \in \mathfrak{T}$ entonces A es una vecindad de x y además $A \subseteq A$.

$\Leftarrow|$ Sea $A \subseteq X$ y supongamos que para cada x en A existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V_x \subseteq A$. Por definición existe un abierto B_x tal que $x \in B_x \subseteq V_x$. Como $A = \bigcup\limits_{x \in A} B_x$, entonces $A \in \mathfrak{T}$.

■

Definición 1.3.7 *Sean* $(X, \mathfrak{T})$ *un espacio topológico y* $x \in X$. *Una colección* $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ *es una* **base de vecindades** *ó* **base local de vecindades** *de* x *en* X *si para cada* $V \in \mathcal{V}(x)$ *podemos encontrar* $B \in \mathcal{B}(x)$ *tal que* $B \subseteq V$.

Ejemplo: Consideremos a los reales $\mathbb{R}$ con la topología usual, entonces $\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ es una base de vecindades para cada $x \in \mathbb{R}$.

Definición 1.3.8 *Sea* $(X, \mathfrak{T})$ *un espacio topológico. Diremos que* X *es* **primero numerable** *si cada punto* $x \in X$ *posee una base local de vecindades numerable.*

Ejemplo: Para un espacio métrico X y cada $x \in X$, el conjunto $\{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local de vecindades numerable para x.

Definición 1.3.9 *Sea* $(X, \mathfrak{T})$ *un espacio topológico. Diremos que* X *es* **segundo numerable** *si existe una base numerable para* $\mathfrak{T}$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}$ con la topología usual $\mathfrak{T}_e$, el conjunto $\{(r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}) : r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable para $\mathfrak{T}_e$.

Definición 1.3.10 *Sean* $(X, \mathfrak{T})$ *un espacio topológico y* $E \subseteq X$. *Diremos que* E *es un* **subconjunto cerrado** *de* $(X, \mathfrak{T})$*, si* $X - E$ *es abierto; es decir, si* $X - E \in \mathfrak{T}$.

Ejemplo: Como se mencionó anteriormente $\mathfrak{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}\}$ es una topología para $X = \{1,2,3\}$. Dado que $\{1\} \in \mathfrak{T}$, entonces su complemento $X - \{1\}$ es un subconjunto cerrado de X.

Lema 1.3.11 *Sean* $(X, \mathfrak{T})$ *un espacio topológico y* $(Y, \mathfrak{T}|_Y)$ *un subespacio de* X. *Entonces un subconjunto no vacío* E *de* Y *es cerrado en* Y *si y sólo si existe un cerrado* F *en* X *tal que* $E = F \cap Y$.

Demostración.

$\Rightarrow|$ Sea $E \subset Y$ no vacío y cerrado en Y, entonces $Y - E$ es un abierto de Y. Como $Y - E \in \mathfrak{T}|_Y$ existe $A \in \mathfrak{T}$ tal que $Y - E = A \cap Y$. Sea $F = X - A$, F es cerrado en X pues A es abierto en X y además $(X - A) \cap Y = E$.

$\Leftarrow|$ Supongamos que $E = F \cap Y$. Como F es cerrado en X, entonces $X - F$ es abierto en X, por tanto $(X - F) \cap Y$ es abierto en Y. Veamos que $Y - ((X - F) \cap Y) = (F \cap Y)$. Usando las leyes de De Morgan se tiene

$Y - ((X - F) \cap Y) = Y \cap (F \cup (X - Y)) = (F \cap Y) \cup (Y \cap (X - Y)) = F \cap Y = E$ que es cerrado en Y.

■

Definición 1.3.12 *Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Definimos el* **interior** *de E en X como el conjunto $\bigcup\{K \subset X : K$ es abierto y $K \subset E\}$. El interior de un conjunto E lo denotaremos como $int(E)$.*

Observemos que para cualquier conjunto E, $int(E) \subseteq E$ e $int(E)$ es abierto. Además, si E es un conjunto abierto se cumple que $E = int(E)$.

Definición 1.3.13 *Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Definimos la* **cerradura** *de E en X como el conjunto $\bigcap\{K \subset X : K$ es cerrado y $E \subset K\}$. A la cerradura de un conjunto E la denotaremos indistintamente como $\overline{E}$ ó $Cl(E)$.*

Observemos que para cualquier conjunto E, $E \subset \overline{E}$ y $\overline{E}$ es cerrado, más aún si E es un conjunto cerrado se cumple que $E = \overline{E}$.

Ejemplo: Si $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, entonces $\overline{E} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

Lema 1.3.14 *Sean X un espacio topológico y A, B subconjuntos de X. Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*

Demostración.

Como $A \subseteq \overline{A}$ y $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$, entonces $A \subseteq \overline{B}$. Por definición, $\overline{A} = \bigcap\{K \subset X : K$ es cerrado y $A \subset K\}$, por lo que $\overline{B}$ es uno de los cerrados que se están intersectando. Así, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. ■

Teorema 1.3.15 *Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Entonces*

$$\overline{E} = \{x \in X : \text{cada subconjunto abierto que contiene a } x \text{ intersecta a } E\}.$$

Demostración.

Supongamos que U es un abierto que contiene a x y no intersecta a E, entonces $E \subset X - U$. Como $X - U$ es cerrado, por el Lema 1.3.14 se tiene que $\overline{E} \subset X - U$, por tanto $x \notin \overline{E}$. Recíprocamente, supongamos que $x \notin \overline{E}$, por ser $\overline{E}$ cerrado, $X - \overline{E}$ es un conjunto abierto que contiene a x y no intersecta a E. ■

Definición 1.3.16 *Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$. Definimos la* **frontera** *de A en X como $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$.*

Podemos observar que para cualquier conjunto A, $\partial(A)$ es un conjunto cerrado por ser intersección de dos conjuntos cerrados.

Definición 1.3.17 *Sea X un espacio topológico. Diremos que un subconjunto A de X es* **denso** *en X si $\overline{A} = X$.*

La definición anterior nos dice que todo punto de X pertenece a $\overline{A}$, es decir, todo abierto de X intersecta a A.

Ejemplo: Consideremos el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual, entonces $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso numerable ya que todo abierto de $\mathbb{R}$ intersecta a $\mathbb{Q}$.

Definición 1.3.18 *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es* **separable** *si contiene un subconjunto denso numerable.*

Ejemplo: Por el ejemplo anterior $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso numerable de $\mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R}$ es un espacio separable.

Proposición 1.3.19 *Sea X un espacio métrico y sea $\mathfrak{T}_d$ la topología generada en X por la métrica d. Entonces X es separable si y sólo si X es segundo numerable.*

Demostración.

$\Rightarrow$ | Supongamos que X es separable. Sea D un subconjunto denso numerable de $(X, \mathfrak{T}_d)$. Para cada $z \in D$ consideramos la colección $\mathcal{B}(z) = \{B_{\frac{1}{n}}(z) : n \in \mathbb{N}\}$. Tomamos $\mathcal{B} = \bigcup_{z \in D} \mathcal{B}(z)$. Como D es numerable, y la unión de una colección numerable de conjuntos numerables sigue siendo numerable, entonces $\mathcal{B}$ es numerable. Veamos que que $\mathcal{B}$ es una base para $\mathfrak{T}_d$. Supongamos que $A \in \mathfrak{T}_d$ contiene a $x \in X$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq A$. Como D es denso en X, podemos asegurar que existe un $z \in D \cap B_{\frac{1}{2n}}(x)$. Luego, $x \in B_{\frac{1}{2n}}(z)$ y $B_{\frac{1}{2n}}(z) \in \mathcal{B}$. Sea $y \in B_{\frac{1}{2n}}(z)$ entonces $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ y como $d(x, z) < \frac{1}{2n}$ y $d(z, y) < \frac{1}{2n}$, entonces $d(x, y) < \frac{1}{n}$. Es decir, $y \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ y como $B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq A$ se tiene que $y \in A$ y por tanto $B_{\frac{1}{2n}}(z) \subseteq A$. Así, X es segundo numerable.

$\Leftarrow$ | Supongamos que X es segundo numerable. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de $\mathfrak{T}_d$ y consideremos el conjunto $D = \{x_n : x_n \in B \text{ y } B \in \mathcal{B}\}$. Veamos que $\overline{D} = X$. Como $D \subseteq X$, por el Lema 1.3.14, $\overline{D} \subseteq X$. Ahora, sea $x \in X$, entonces cada elemento de la base que contenga a x intersecta a D (Teorema 1.3.15), entonces $x \in \overline{D}$. Así $\overline{D} = X$, es decir, D es un subconjunto denso numerable en X. Por lo tanto, X es separable.

■

Definición 1.3.20 *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es* **disconexo** *si existen H y K abiertos, ajenos y no vacíos de X cuya unión es X (también se puede considerar su equivalente a H y K cerrados). Si X no es disconexo diremos que X es* **conexo**.

Cuando un espacio X es disconexo, se suele decir que los abiertos U y V con las propiedades anteriores forman una separación de X. Por lo tanto, podemos decir que un espacio X es conexo si y sólo si no existe una separación de X.

Proposición 1.3.21 *Sea X un espacio topológico conexo. Si A es un subconjunto abierto y cerrado en X, entonces $A = \emptyset$ ó $A = X$.*

Demostración.

Sea A un subconjunto abierto y cerrado en X tal que $A \neq \emptyset$ y $A \neq X$. Por la Definición 1.3.10, el subconjunto $X - A$ es abierto y cerrado en X y dado que $X = A \cup (X - A)$, entonces existe una separación de X, lo que contradice el hecho de que X es conexo. Por lo tanto, $A = \emptyset$ ó $A = X$. ∎

Teorema 1.3.22 *Sean X un espacio topológico y Y una familia de subconjuntos conexos de X. Si existe A_0 en Y tal que para todo A en Y, $A \cap A_0 \neq \emptyset$, entonces $B = \bigcup_{A \in Y} A$ es conexo.*

Demostración.

Supongamos que existe A_0 en Y tal que $A \cap A_0 \neq \emptyset$ para todo A en Y y supongamos que B no es conexo, es decir, $B = H \cup K$ con H, K abiertos, ajenos y no vacíos de X. Como $A_0 \in Y$ y por ser A_0 conexo, sin pérdida de generalidad supongamos $A_0 \in H$. Si para algún $A \in Y$, $A \subset K$ entonces $A \cap A_0 \subset H \cap K = \emptyset$, lo cual es una contradicción a la hipótesis $A \cap A_0 \neq \emptyset$ para todo A en Y. De manera que para todo $A \in Y$, $A \in H$ y por tanto $B \subset H$, es decir, $K = \emptyset$, contradiciendo el hecho que $K \neq \emptyset$. Por lo tanto, B es conexo. ∎

Corolario 1.3.23 *Sean X un espacio topológico y Y una familia de subconjuntos conexos de X tal que $\bigcap_{A \in Y} A \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{A \in Y} A$ es conexo.*

Demostración.

Supongamos que $\bigcap_{A \in Y} A \neq \emptyset$, entonces existe $A_0 \in \bigcap_{A \in Y} A$ tal que $A_0 \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in Y$. Así, por el Teorema 1.3.22, $\bigcup_{A \in Y} A$ es conexo. ∎

Lema 1.3.24 *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Si A es conexo y B es cualquier subconjunto de X con $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es conexo.*

Demostración.

Sean A, B subconjuntos de X, con A conexo y B tal que $A \subset B \subset \overline{A}$. Supongamos que B no es conexo, entonces existen H, K abiertos relativos, ajenos y no vacíos de B tales que $B = H \cup K$. Como A es conexo y $A \subset B$, sin pérdida de generalidad supongamos que $A \subset H$. Por ser K abierto, $X - K$ es cerrado y $\overline{X - K} = X - K$, además $A \subset X - K$, en consecuencia, $\overline{A} \subset X - K$. Como

$B \subset \overline{A}$, entonces $B \subset X - K$ y se tiene que $B \cap K = \emptyset$, lo cual es una contradicción ya que $K \subset B$ y es no vacío. Por lo tanto, B es conexo. ■

Definición 1.3.25 *Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos de X es una* **cubierta** *de X si $X \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Diremos que $\mathcal{U}$ es una* **cubierta abierta** *de X si todos los elementos de $\mathcal{U}$ son abiertos de X.*

Definición 1.3.26 *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es* **compacto** *si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

Proposición 1.3.27 *Sea X un espacio topológico compacto y sea F un subespacio cerrado de X. Entonces F es compacto.*

Demostración.

Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de F. Para todo $V \in \mathcal{V}$ existe U_V un conjunto abierto de X tal que $V = U_V \cap F$, entonces $\mathcal{U} = \{U_V : V \in \mathcal{V}\} \cup \{X - F\}$ es una cubierta abierta de X. Por ser X compacto existe $\mathcal{U}'$ una subcubierta finita de $\mathcal{U}$, entonces la familia $\{U \cap F : U \in \mathcal{U}'\}$ es una subcubierta finita de F. Así, F es compacto. ■

Lema 1.3.28 *Sea X un espacio métrico compacto y sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$.*

(1) Si U es un abierto de X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset U$.

(2) Si cada $X_n \neq \emptyset$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$.

Demostración.

(1) Sea U es un abierto de X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$. Por ser U abierto, entonces $X - U$ es cerrado y por la Proposición 1.3.27, $X - U$ es compacto. Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$ se tiene que $X - U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X - X_n$, por lo que existen $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}$ tales que $X - U \subset \bigcup_{j=1}^{k} X - X_{n_j}$. Sea $N = \text{máx}\{n_1, n_2, ..., n_k\}$, entonces $\bigcup_{j=1}^{k} X - X_{n_j} = X_N$ y por tanto $X_N \subset U$.

(2) Supongamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. Sea $U = \emptyset$ por (1) se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U = \emptyset$ lo cual implica que $X_N = \emptyset$ para alguna $N \in \mathbb{N}$, contradiciendo la hipótesis $X_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$.

■

Las siguientes definiciones se conocen como axiomas de separación T_1 y T_4 y permiten la generalización de ciertos resultados del análisis clásico a la topología. Estos axiomas se refieren a las formas de separar puntos y conjuntos cerrados en espacios topológicos.

Definición 1.3.29 *Un espacio topológico X es un espacio T_1 si para cada $x, y \in X$, $x \neq y$ existen abiertos U y V de X tales que $x \in U - V$, $y \in V - U$.*

Definición 1.3.30 *Un espacio topológico X es un espacio* **normal** *ó T_4 si X es T_1 y para cualesquiera conjuntos cerrados y ajenos F_1 y F_2 de X existen abiertos y ajenos U, V de X tales que $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$.*

Ejemplo: Todo espacio métrico es normal. Sean F_1, F_2 subconjuntos cerrados y ajenos de X. Como $F_1 \subseteq X - F_2$ para cada $x \in F_1$ podemos elegir $\delta_x > 0$ tal que $x \in B_{\delta_x}(x) \subseteq X - F_2$. Análogamente para cada $y \in F_2$ podemos elegir $\varepsilon_y > 0$ tal que $y \in B_{\varepsilon_y}(y) \subseteq X - F_1$. Consideremos $U = \bigcup\{B_{\delta_x}(x) : x \in F_1\}$ y $V = \bigcup\{B_{\varepsilon_y}(y) : y \in F_2\}$. Entonces U y V son abiertos y ajenos de X tales que $F_1 \subset U$ y $F_2 \subset V$.

Proposición 1.3.31 *Sea X un espacio métrico y compacto. Entonces X es un espacio normal.*

Demostración.

Sean F_1 y F_2 subconjuntos cerrados y ajenos de X. Por la Proposición 1.3.27, F_1 y F_2 son compactos. Sea $y \in F_1$, como X es métrico para cada $x \in F_2$ existen U_x^y, V_x^y abiertos, ajenos y no vacíos de X tales que $x \in U_x^y$, $y \in V_x^y$. Consideremos $\mathcal{U} = \{U_x^y \cap F_2 : x \in F_2\}$ lo cual es una cubierta abierta de F_2. Por ser F_2 compacto existe $\{U_{x_1}^y \cap F_2, U_{x_2}^y \cap F_2, ..., U_{x_n}^y \cap F_2\}$ subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Sea $A_y = U_{x_1}^y \cup U_{x_2}^y \cup \cdots \cup U_{x_n}^y$ y $B_y = V_{x_1}^y \cap V_{x_2}^y \cap \cdots \cap V_{x_n}^y$. Así $\mathcal{W} = \{B_y \cap F_1 : y \in F_1\}$ es una cubierta abierta de F_1. Como F_1 es compacto existe $\{B_{y_1} \cap F_1, B_{y_2} \cap F_1, ..., B_{y_m} \cap F_1\}$ subcubierta finita de $\mathcal{W}$. Consideremos así $U = B_{y_1} \cup B_{y_2} \cup \cdots \cup B_{y_m}$ y $V = A_{y_1} \cap A_{y_2} \cap \cdots \cap A_{y_n}$. Así, $F_1 \subseteq U$, $F_2 \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, X es normal. ■

Proposición 1.3.32 *Si X es un espacio métrico, entonces para cualquier $x \in X$ y cualquier abierto U de X que contenga a x, existe un abierto V de X tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demostración.

Sean $x \in X$ y $U \subset X$ abierto tal que $x \in U$, entonces $X - U$ es cerrado y no contiene a x. Como X es métrico existen W_1 y W_2 abiertos y ajenos de X tales que $x \in W_1$ y $X - U \subseteq W_2$. Así, $X - W_2$ es un subconjunto cerrado de X tal que $\overline{X - W_2} = X - W_2$ y $X - W_2 \subseteq U$. Como $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, se sigue que $W_1 \subseteq X - W_2$ y por tanto $\overline{W_1} \subseteq X - W_2$ (Lema 1.3.14). Consideremos $V = W_1$, entonces $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X - W_2 \subseteq U$. ■

Teorema 1.3.33 *Sea X un espacio métrico. Si A es un subconjunto compacto de X, entonces para cada abierto U de X que contenga a A existe un abierto V de X tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demostración.

Sea $A \subseteq X$ compacto. Como X es métrico, por la Proposición 1.3.32 para cada $a \in A$ existe $V_a \subseteq X$ abierto tal que $a \in V_a$ y $\overline{V_a} \subseteq U$. Por ser A compacto existe una subcubierta abierta finita $V_{a_1}, V_{a_2}, ..., V_{a_n}$ de A y tal que $\overline{V}_{a_i} \subseteq U$ para cada $i = 1, 2, ...n$. Así, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_{a_i} \subseteq U$. Consideremos $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}$, es abierto por ser unión arbitraria de abiertos y además $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ como se quería. ■

Definición 1.3.34 *Sea X un espacio topológico y sea p un punto de X, se define la* **componente $C(p)$** *de p en X como*

$$C(p) = \bigcup \{A \subset X : p \in A \text{ y } A \text{ es conexo}\}.$$

Observemos que si X es un espacio topológico conexo para cualquier punto $p \in X$ se tiene que $C(p)$ es X. Además por el Corolario 1.3.23, $C(p)$ es un conjunto conexo.

Definición 1.3.35 *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Diremos que A es una* **componente** *de X si A es conexo y para cualquier subconjunto conexo B de X tal que $A \subset B$ se tiene $B = A$.*

Lema 1.3.36 *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ conexo. Entonces $\overline{A}$ es conexo.*

Demostración.

Como $\overline{A} \subset \overline{A}$ y $A \subset \overline{A}$ por el Lema 1.3.24, $\overline{A}$ es conexo. ■

Proposición 1.3.37 *Sea X un espacio topológico. Entonces las componentes de X son cerradas.*

Demostración.

Sean $x \in X$ y C la componente de X que contiene a x, entonces por el Lema 1.3.36, $\overline{C}$ es también una componente que contiene a x y por tanto $\overline{C} \subset C$. Así, C es cerrado en X. ∎

Definición 1.3.38 *Sea X un espacio topológico y sea p un punto de X, se define la* **quasicomponente** *$Q(p)$ de p en X como*

$$Q(p) = \bigcap \{A \subset X : p \in A,\ A \text{ es abierto y cerrado en } X\}.$$

Por definición, las quasicomponentes de un espacio topológico son subconjuntos cerrados por ser intersección de una familia de cerrados.

Proposición 1.3.39 *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Entonces $C(p) \subseteq Q(p)$.*

Demostración.

Si $A = X$, entonces A abierto y cerrado tal que $C(p) \subset A$. Sea A un subconjunto propio, abierto y cerrado en X tal que $p \in A$, entonces A y $X - A$ son una separación de X. Como $C(p)$ es un conjunto conexo entonces $C(p) \subseteq A$ ó $C(p) \subseteq X - A$ pero como $C(p) \cap A \neq \emptyset$ puesto que $p \in C(p) \cap A$, se sigue que $C(p) \subseteq A$, es decir, la componente de un punto p en X está contenida en cada subconjunto abierto y cerrado en X que contenga a p, por lo tanto $C(p) \subseteq Q(p)$. ∎

La otra contención no se cumple para algunos espacios topológicos. Consideremos el siguiente ejemplo:

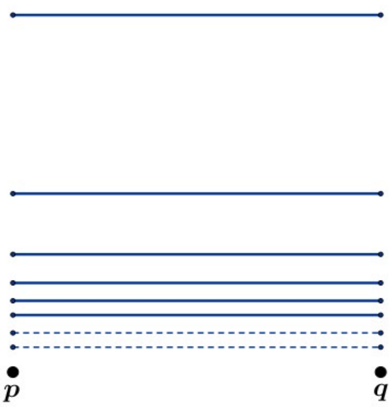


Figura 1.1: Componente y quasicomponente

Ejemplo: Sean $L_n = [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ con $n \in \mathbb{N}$, $p = (0,0)$, $q = (1,0)$ y $X \subset \mathbb{R}^2$ definido como $X = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n \right) \cup \{p, q\}$. Ver Figura 1.1. Observemos que para el punto p el único conexo que contiene a p es el mismo y por tanto $C(p) = p$. Por otro lado, los únicos abiertos y cerrados de X que contienen a p son como se muestra en la Figura 1.2 y por tanto $Q(p) = \{p, q\}$.

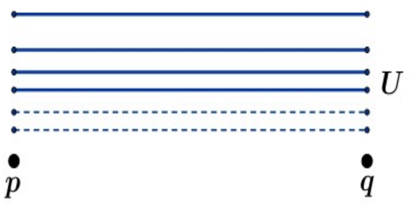


Figura 1.2: abierto

La siguiente proposición nos permite saber para qué espacios topológicos las componentes coinciden con las quasicomponentes.

Proposición 1.3.40 *Sea X un espacio métrico y compacto y sea $p \in X$. Entonces $C(p) = Q(p)$.*

Demostración.

Dado que $C(p) \subseteq Q(p)$ (Proposición 1.3.39), basta probar que $Q(p) \subseteq C(p)$. Como $C(p)$ es la unión de conexos que contienen a p entonces sólo probaremos que $Q(p)$ es conexo. Supongamos que $Q(p)$ no es conexo, es decir, $Q(p) = H \cup K$, con H, K subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos en X. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p \in H$. Por la Proposición 1.3.31, X es normal y existen U, V abiertos ajenos en X tales que $H \subseteq U$ y $K \subseteq V$, por lo que $Q(p) = H \cup K \subseteq U \cup V$. Como $U \cup V$ es abierto, entonces $X - (U \cup V)$ es cerrado y en consecuencia compacto (Proposición 1.3.27), además $X - (U \cup V) \subset X - (H \cup K) = X - Q(p) = X - (\bigcap\{A \subset X : p \in A,\ A \text{ es abierto y cerrado en } X\}) = \bigcup\{X - A : p \in A,\ A \text{ es abierto y cerrado en } X\}$.
Así, $\{X - A : p \in A,\ A \text{ es abierto y cerrado en } X\}$ es una cubierta abierta de $X - (U \cup V)$ y por ser compacto existe una subcubierta finita, es decir, existen $A_1, A_2, ..., A_n$ abiertos y cerrados en X tales que $p \in A_i$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ y $X - (U \cup V) \subset (X - A_1) \cup (X - A_2) \cup \cdots \cup (X - A_n) = X - (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$, lo cual implica que $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \subset U \cup V$. Sea $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ es abierto y cerrado en X y $p \in A \subset U \cup V$. Notemos además que $A \cap U = A \cap (X - V)$, así $A \cap U$ es abierto y cerrado en X y como $p \in A \cap H \subset A \cap U$, por la definición de $Q(p)$ se tiene que $Q(p) = H \cup K \subset A \cap U$, entonces $K \subset (A \cap U)$ y como además $K \subset V$ se tiene que $K \subset (A \cap U) \cap V = \emptyset$, es decir, $K = \emptyset$ lo cual es una contradicción a la suposición que $K \neq \emptyset$, por lo tanto $Q(p)$ es conexo, esto implica que $Q(p) \subseteq C(p)$. ∎

Teorema 1.3.41 *Sea X un espacio métrico y compacto. Si K es una componente de X y F es un conjunto cerrado en X tal que $K \cap F = \emptyset$, entonces existe un conjunto abierto y cerrado B en X tal que $K \subseteq B$ y $B \cap F = \emptyset$.*

Demostración.

Sean F un conjunto cerrado en X y K una componente de X tal que $K \cap F = \emptyset$. Por la Proposición 1.3.40, K es una quasicomponente de X por lo que existe una colección $\mathcal{A}$ de conjuntos abiertos y cerrados, no vacíos en X tales que $K = \cap\mathcal{A}$. Como $K \cap F = \emptyset$, $F \subseteq X - K = X - \cap\mathcal{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}}(X - A)$. Por ser F cerrado se tiene que F es compacto, entonces existen $A_1, A_2, ..., A_n$ elementos de $\mathcal{A}$ tales que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(X - A_i) = X - (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$, en consecuencia $F \cap (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \emptyset$ y $K = \cap\mathcal{A} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Consideremos $B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, entonces se tiene que B es abierto y cerrado en X tal que $K \subseteq B$ y $B \cap F = \emptyset$ como se quería. ∎

Definición 1.3.42 *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Diremos que f es* **continua en** $x_0 \in X$*, si para cualquier abierto V de Y que contiene a $f(x_0)$, existe U abierto de X que contiene a x_0 tal que $f(U) \subset V$. Diremos que f es* **continua** *si es continua para todo $x \in X$.*

Teorema 1.3.43 *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces f es continua si y sólo si para todo U abierto de Y, $f^{-1}(U)$ es abierto de X.*

Demostración.

$\Rightarrow|$ Sea U abierto de Y y sea $x \in f^{-1}(U)$, por ser f continua existe V abierto de X que contiene a x de tal forma que $f(V) \subset U$, en consecuencia $x \in V \subset f^{-1}(U)$.

$\Leftarrow|$ Sean $x \in X$ y A abierto de Y tal que $f(x) \in A$, por hipótesis $f^{-1}(A)$ es abierto de X, entonces $x \in f^{-1}(A)$. Por ser $f^{-1}(A)$ abierto existe V abierto de X tal que $x \in V \subset f^{-1}(A)$ por tanto $f(V) \subset A$.

∎

Teorema 1.3.44 *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) f es continua;

(2) $f^{-1}[B]$ es cerrado para todo $B \subset Y$ cerrado;

(3) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$;

(4) $\overline{(f^{-1}(B))} \subset f^{-1}(\overline{B})$ para todo $B \subset Y$.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea F cerrado de Y, entonces $Y - F$ es abierto en Y. Como f es continua por el Teorema 1.3.43, $f^{-1}(Y - F)$ es abierto en X. Observemos que $f^{-1}(Y - F) = \{x \in X : f(x) \in Y - F\} = X - f^{-1}(F)$. Así $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $A \subset X$, como la cerradura de un conjunto es cerrado, $\overline{f(A)}$ es cerrado y por (1), $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es cerrado en X, por lo que si $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ entonces $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ lo cual implica que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Sea $B \subset Y$ y consideremos $A = f^{-1}(B)$. Por (3) se tiene $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Como $f(A) \subseteq B$, entonces $f(\overline{A}) \subseteq \overline{B}$ y por tanto $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$, es decir, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Sea U abierto de Y, entonces $Y - U$ es cerrado y en consecuencia $\overline{Y - U} = Y - U$. Por (4) se tiene $\overline{f^{-1}(Y - U)} \subseteq f^{-1}(Y - U)$ y como $f^{-1}(Y - U) \subseteq \overline{f^{-1}(Y - U)}$ entonces $\overline{f^{-1}(Y - U)} = f^{-1}(Y - U) = X - f^{-1}(U)$ es cerrado y por tanto $f^{-1}(U)$ abierto. Así, por el Teorema 1.3.43, f es continua.

■

Proposición 1.3.45 *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si A es un subespacio de X, entonces $f\mid_A : A \longrightarrow Y$ es continua.*

Demostración.

Sea U abierto de Y, por ser f continua se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto de X (Teorema 1.3.43) y como A es subespacio de X, entonces $V = f^{-1}(U) \cap A$ es abierto de A, por lo que $f\mid_A (U)$ es abierto, por tanto $f\mid_A$ es continua. ■

Lema 1.3.46 *Sean X y Y espacios topológicos y sean A, B cerrados en X tales que $X = A \cup B$. Si $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ son funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$. Entonces la función $h : X \to Y$, definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ \\ g(x) & si \quad x \in B \end{cases}$$

es continua.

Demostración.

Sea $F \subset Y$ cerrado. Como f y g son continuas por la Proposición 1.3.44, $f^{-1}(F)$ y $g^{-1}(F)$ son cerrados en A y B respectivamente, y por ser A y B cerrados en X entonces $f^{-1}(F)$ y $g^{-1}(F)$ son cerrados en X. Luego, $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$ lo cual es cerrado en X y nuevamente por la Proposición 1.3.44, se tiene que h es continua. ■

Proposición 1.3.47 *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración.

Supongamos que $f(X)$ no es conexo, entonces existen H, K abiertos, ajenos y no vacíos de Y tales que $f(X) = H \cup K$. Por ser f continua $f^{-1}(H)$ y $f^{-1}(K)$ son abiertos de X y son no vacíos pues H y K son no vacíos. Como $f^{-1}(H) \subset X$ y $f^{-1}(K) \subset X$, entonces $f^{-1}(H) \cup f^{-1}(K) \subset X$. Por otra parte, si $x \in X$, se tiene que $x \in f^{-1}(H)$ o bien $x \in f^{-1}(K)$ por tanto $X \subset f^{-1}(H) \cup f^{-1}(K)$. Así $X = f^{-1}(H) \cup f^{-1}(K)$. Observemos que si $f^{-1}(H)$ y $f^{-1}(K)$ son ajenos, entonces X es disconexo llegando a una contradicción.
Supongamos que $f^{-1}(H) \cap f^{-1}(K) \neq \emptyset$, sea $x \in f^{-1}(H) \cap f^{-1}(K)$ entonces existen $h \in H$ tal que $f(x) = h$ y $k \in K$ tal que $f(x) = k$, lo que implica que $h = k$ contradiciendo que H y K son ajenos. Por tanto $f(X)$ es conexo. ∎

Proposición 1.3.48 *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.*

Demostración.

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de $f(X)$. Veamos que $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta de X. Sea $x \in X$, entonces $f(x) \in f(X)$ y como $f(X) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ se tiene que $f(x) \in U_\alpha$ para algún $\alpha \in I$, esto implica que $x \in f^{-1}(U_\alpha)$, por tanto $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$, es decir, $X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$.

Como X es compacto, existe una subcubierta abierta tal que $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i})$.

Ahora veamos que $f(X) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Sea $y \in f(X)$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, por lo que $x \in f^{-1}(U_{\alpha_i})$ para algún $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces $f(x) \in U_{\alpha_i}$, es decir, $y \in U_{\alpha_i}$ para algún $i \in \{1, 2, ..., n\}$, así se tiene que $f(x) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ por tanto $f(X)$ es compacto. ∎

Definición 1.3.49 *Una* **sucesión** *en X es una función del conjunto de números naturales, $\mathbb{N}$, en X. Al elemento $f(n)$ lo denotaremos por x_n y la sucesión $n \longrightarrow x_n$ será representada por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

Definición 1.3.50 *Sea X un espacio topológico. Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X* **converge** *a un punto $x_0 \in X$ si para cada vecindad U de x_0 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para cada $n \geqslant N$. Denotaremos por $x_n \to x_0$ cuando la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_0.*

Definición 1.3.51 *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. Diremos que f es un* **homeomorfismo***, si f y su inversa f^{-1} son funciones continuas. Dos espacios topológicos se dirán* **homeomorfos** *cuando exista un homeomorfismo entre ellos. Utilizaremos la notación $X \cong Y$ para decir que X es homeomorfo a Y.*

Capítulo 2

Continuos e hiperespacios

En el capítulo anterior se dió la definición de espacio métrico y se estudiaron algunas propiedades de espacios topológicos como conexidad y compacidad, estos conceptos nos servirán para la comprensión de este capítulo donde se incluyen definiciones y algunos resultados importantes en teoría de continuos e hiperespacios. Los ejemplos que veremos tendrán la métrica usual de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ según sea el caso.

2.1 Continuos

Definición 2.1.1 *Diremos que X es un* **continuo** *si es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un subconjunto no vacío A de X, es un* **subcontinuo** *de X si A es cerrado y conexo.*

Si X es un continuo que consta de un sólo punto, diremos que es un continuo degenerado; de lo contrario, diremos no degenerado.

Figura 2.1: Intervalo $[0, 1]$.

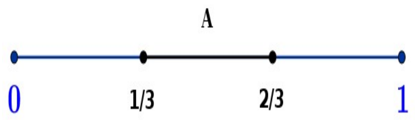


Figura 2.2: Subcontinuo A=$\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

El intervalo $[0, 1]$ es un continuo, pues sabemos que es un espacio métrico, conexo, compacto, no vacío. El intervalo $A = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ es un subcontinuo del $[0, 1]$.

En este trabajo denotaremos por $\boldsymbol{I}$ al intervalo $[0, 1]$.

Diremos que un **arco** es cualquier espacio topológico homeomorfo a I.

Otro continuo es el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (Figura 2.3). A este conjunto le llamaremos circunferencia unitaria y la denotaremos por $\boldsymbol{S^1}$.

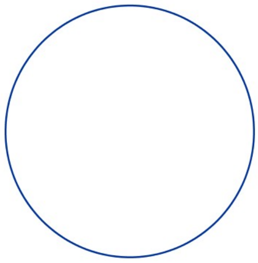


Figura 2.3: Circunferencia unitaria S^1.

A todo espacio topólogico homeomorfo a S^1 le llamaremos **curva cerrada simple**.

Una manera útil de construir continuos es tomando uniónes finitas de continuos tales que su intersección no sea vacía. El siguiente teorema nos permite saber cuando podemos construir subcontinuos a través de una unión finita de subcontinuos la cual no es necesario que su intersección sea distinta del vacío.

Teorema 2.1.2 *Sea X un continuo y Z un subcontinuo de X tal que $X - Z$ no es conexo. Si H y K son abiertos y ajenos de X tales que $X - Z = H \cup K$, entonces $Z \cup H$ y $Z \cup K$ son subcontinuos de X.*

Demostración.

Como Z es un subcontinuo, entonces Z es cerrado y en consecuencia $X - Z$ es abierto, además como H y K son abiertos, $X - H = Z \cup K$ y $X - K = Z \cup H$ son cerrados y por tanto compactos.
Ahora veamos que $Z \cup K$ y $Z \cup H$ son conexos. Supongamos que $Z \cup K$ no es conexo, entonces existen $A, B \in X$ cerrados, no vacíos y ajenos tales que $Z \cup K = A \cup B$. Como $Z = (Z \cap A) \cup (Z \cap B)$ y es conexo, entonces $Z \subset Z \cap A$ ó $Z \subset Z \cap B$, sin pérdida de generalidad supongamos que $Z \subset Z \cap A$, entonces $Z \cap B = \emptyset$ y $Z \subset A$.
Sean $A_1 = A \cup H$ y $B_1 = B$, entonces

$$X = (X - Z) \cup Z = (H \cup K) \cup Z = H \cup (Z \cup K) = H \cup (A \cup B) =$$
$$(A \cup H) \cup B = A_1 \cup B_1$$

obteniendo así que $X = A_1 \cup B_1$. Como A y B son no vacíos, entonces A_1 y B_1 son no vacíos. Como $Z \cup K = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ y $Z \subset A$, entonces $B \subset K$ y por lo tanto $H \cap B \subset H \cap K = \emptyset$, entonces $H \cap B = \emptyset$, esto implica que A_1 y B_1 son una separación de X contradiciendo que X es conexo, por lo tanto $Z \cup K$ es conexo. De forma similar se demuestra que $Z \cup H$ es conexo. Así $Z \cup K$ y $Z \cup H$ son compactos y conexos y por tanto subcontinuos de X. ■

Teorema 2.1.3 *(Golpes en la frontera) Sea X un continuo. Si U es un conjunto abierto, propio y no vacío de X y K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap \partial(U) \neq \emptyset$.*

Demostración.

Sea U un abierto, propio y no vacío de X y sea K una componente de $\overline{U}$. Supongamos que $K \cap \partial(U) = \emptyset$, como $\partial(U) = \overline{U} \cap (\overline{X - U})$ es un cerrado en $\overline{U}$ por el Teorema 1.3.41, se tiene que existe B un conjunto abierto y cerrado en $\overline{U}$ no vacío tal que $B \cap \partial(U) = \emptyset$ y $K \subset B \subset \overline{U}$, pero $\overline{U} = U \cup \partial(U)$ entonces $B \subset U \cup \partial(U)$, así $B \subseteq U$. Por ser B abierto en $\overline{U}$ existe un abierto W en X tal que $B = \overline{U} \cap W \subset W$, por lo que $B \subset W$, así $B \subset W \cap U$. Luego $W \cap U \subseteq W \cap \overline{U} = B \subseteq W \cap U$, es decir, $B = W \cap U$ por lo tanto B es abierto de X por ser U y W abiertos de X. Similarmente por ser B cerrado de $\overline{U}$ existe un cerrado W_0 en X tal que $B = \overline{U} \cap W_0$, por lo tanto B es cerrado en X por ser intersección de dos cerrados en X. Como X es conexo por la Proposición 1.3.21, se debe tener que $B = X$ pero como $B \subset U$ entonces $U = X$, contradiciendo el hecho de que U es abierto propio de X. Por lo tanto, $K \cap \partial(U) \neq \emptyset$. ∎

Corolario 2.1.4 *Sean X un continuo y B un subcontinuo propio de X. Si U es un abierto en X tal que $B \subset U$, entonces existe un subcontinuo K de X distinto de B tal que $B \subset K \subset U$.*

Demostración.

Sea B subcontinuo propio de X y U abierto de X tal que $B \subset U$. Por el Teorema 1.3.33, existe un subconjunto abierto V de X tal que $B \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Sea K la componente de $\overline{V}$ que contiene a B, K es un subcontinuo de X pues es conexo y es compacto ya que es componente de un compacto (Proposición 1.3.40). Como V es un abierto propio de X, por el Teorema 2.1.3, $K \cap \partial(V) = K \cap (\overline{V} \cap (\overline{X - V})) = (K \cap \overline{V}) \cap (K \cap (\overline{X - V})) = K \cap (\overline{X - V}) \neq \emptyset$, como $X - V$ es cerrado se tiene que $\overline{X - V} = X - V$, así $K \cap (X - V) \neq \emptyset$. Como $B \subset V$, $B \cap (X - V) = \emptyset$, entonces $B \neq K$ y además $B \subset K \subseteq \overline{V} \subseteq V \subset U$. ∎

Teorema 2.1.5 *Sea X un continuo y sea E un subconjunto propio y no vacío de X. Si K es una componente de E, entonces $\overline{K} \cap \partial(E) \neq \emptyset$.*

Demostración.

Sea E un subconjunto propio y no vacío de X y sea K una componente de E. Supongamos que $\overline{K} \cap \partial(E) = \emptyset$, entonces $\overline{K} \cap (\overline{E} \cap (\overline{X - E})) = (\overline{K} \cap \overline{E}) \cap (\overline{K} \cap (\overline{X - E})) = \overline{K} \cap (\overline{X - E}) = \emptyset$ y $\overline{K}$ es un subcontinuo propio de X. Sea $U = X - (\overline{X - E})$, por ser $\overline{X - E}$ cerrado, U es abierto. Luego $U \subset E$ y como $\overline{K} \cap (\overline{X - E}) = \emptyset$ se tiene que $\overline{K} \subset U$, por lo que $\overline{K} \subset U \subset E$. Por el Corolario 2.1.4, existe un subcontinuo B de X tal que $\overline{K} \subset B \subset U$ y $B \neq \overline{K}$. Como B es un conjunto conexo que contiene a K y K es una componente, entonces $B = K$ además como $B \subset K \subset \overline{K} \subset B$ se tiene que $B = \overline{K}$, lo cual es una contradicción al hecho que $B \neq \overline{K}$. Por lo tanto, $\overline{K} \cap \partial(E) \neq \emptyset$. ∎

Corolario 2.1.6 *Sean X un continuo, E un subconjunto propio, abierto y no vacío de X y K una componente de E. Entonces $\overline{K} \cap (X - E) \neq \emptyset$.*

Demostración.

Sea E un subconjunto propio y abierto de X y sea K una componente de E. Como E es abierto, entonces $X - E$ es cerrado y por tanto $\overline{X - E} = X - E$. Por el Teorema 2.1.5, $\overline{K} \cap \partial(E) \neq \emptyset$, es decir, $\overline{K} \cap \partial(E) = \overline{K} \cap (\overline{E} \cap \overline{X - E}) = \overline{K} \cap (\overline{X - E}) = \overline{K} \cap (X - E) \neq \emptyset$. ∎

Teorema 2.1.7 *Sea X un continuo y sea A subcontinuo propio de X. Si K es una componente de $X - A$, entonces $K \cup A$ es un subcontinuo.*

Demostración.

Sean A subcontinuo propio de X y K una componente de $X - A$. Como K es cerrado en $X - A$ (Proposición 1.3.37), entonces existe W cerrado de X tal que $K = W \cap (X - A)$, así $K \cup A = (W \cap (X - A)) \cup A = W \cup A$ y como A y W son cerrados en X, entonces $K \cup A$ es cerrado en X, en consecuencia $K \cup A$ es compacto. Por otra parte, como A es cerrado, $X - A$ es abierto y por el Corolario 2.1.6, $\overline{K} \cap A \neq \emptyset$. Sea $p \in \overline{K} \cap A$. Como $K \subset \overline{K}$ y $p \in \overline{K}$, entonces $K \subset K \cup \{p\} \subset \overline{K}$, por el Lemma 1.3.24, $K \cup \{p\}$ es conexo. Como A y $K \cup \{p\}$ son conexos y $(K \cup \{p\}) \cap A \neq \emptyset$, por el Corolario 1.3.23, $(K \cup \{p\}) \cup A = A \cup K$ es conexo. Por lo tanto $K \cup A$ es un subcontinuo de X. ∎

Definición 2.1.8 *Sea X un continuo no degenerado y sea un punto $p \in X$, se define la* **composante** *$K(p)$ de p en X como*

$$K(p) = \bigcup \{x \in X : \exists \ A \text{ subcontinuo propio de } X \text{ tal que } \{x, p\} \subset A\}.$$

Ejemplo: Si $X = [0, 1]$, entonces $K(0) = [0, 1)$, $K(1) = (0, 1]$ y $K(x) = X$ para toda $x \in (0, 1)$.

Lema 2.1.9 *Sean X un continuo no degenerado y $p \in X$. Entonces la composante $K(p)$ en X es densa en X.*

Demostración.

Sean $p \in X$ y U abierto no vacío de X. Dado que X es un espacio métrico por la Proposición 1.3.32, existe V abierto de X tal que $\overline{V} \subset U$. Si $p \in \overline{V}$, entonces $p \in \overline{V} \cap K(p) \subset U \cap K(p)$, así $U \cap K(p) \neq \emptyset$, por lo que $K(p)$ es densa en X. Supongamos que $p \notin \overline{V}$. Sea C la componente de $X - \overline{V}$ que contiene a p, por ser $\overline{C}$ un subcontinuo propio de X que contiene a p, $\overline{C} \subset K(p)$. Por el Teorema 2.1.5, $\overline{C} \cap \partial(X - \overline{V}) = \overline{C} \cap (\overline{X - \overline{V}} \cap \overline{V}) = \overline{C} \cap \overline{V} \neq \emptyset$ y como $\overline{C} \subset K(p)$, $\overline{C} \cap \overline{V} \subset K(p) \cap \overline{V}$ pero $\overline{V} \subset U$, entonces $K(p) \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, $K(p)$ es densa en X. ∎

Lema 2.1.10 *Sean X un continuo no degenerado y $p \in X$. Entonces la composante $K(p)$ en X es unión numerable de subcontinuos propios de X y tal que cada uno contiene a p.*

Demostración.

Sea $\{U_i : i = 1, 2, ...\}$ una base abierta numerable para $X - \{p\}$ (existe pues por la Proposición 1.3.19, X es segundo numerable y es una propiedad hereditaria para subespacios) tal que cada $U_i \neq \emptyset$. Para cada $i = 1, 2, ...$ sea C_i la componente de $X - U_i$ que contiene a p. Como cada U_i es abierto en X y $U_i \neq \emptyset$, entonces cada $C_i \neq X$ y C_i es cerrado en X por ser cerrado de un subconjunto cerrado de X (Proposición 1.3.37) y además es conexo, en consecuencia C_i es un subcontinuo propio de X y $p \in C_i$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \subset K(p)$. Ahora, sea $x \in K(p)$ por lo que existe un subcontinuo propio A de X tal que $\{x, p\} \subset A$. Dado que A es cerrado, $X - A$ es abierto y por tanto existe U_j tal que $A \cap U_j = \emptyset$, es decir, $A \subset X - U_j$. Por definición de componente $A \subset C_j$, entonces $x \in C_j$ y por tanto $K(p) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Así, $K(p) = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. ∎

2.2 Tipos de Continuos

En esta sección definiremos algunos tipos de continuos que serán útiles para nuestro trabajo.

Definición 2.2.1 *Sea X un espacio topológico. Un* **camino** *xy en X, es una función continua $f : I \longrightarrow X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.*

Como se mencionó anteriormente un arco es un espacio topológico homeomorfo al intervalo I. Observemos que cualquier arco es un camino, pero un camino no necesariamente es un arco; consideremos el círculo unitario S^1, es un camino y no es un arco pues no es homeomorfo al intervalo I.

Definición 2.2.2 *Sea X un continuo. Diremos que X es* **arco conexo** *si para cualesquiera dos puntos en X, existe un arco en X que los contiene. Diremos que X es* **hereditariamente arco conexo** *si cualquier subcontinuo A de X, es arco conexo.*

Definición 2.2.3 *Sea X un espacio topológico. Diremos que $A \subset X$ es una* **arco componente** *de X si A es conexo y arco conexo.*

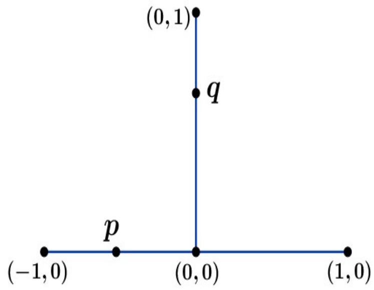


Figura 2.4: Triodo.

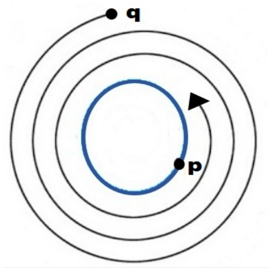


Figura 2.5: Compactación del rayo con residuo S^1

.

Más ejemplos:

Ejemplo: (El triodo) Es la unión de tres arcos con un punto en común y se puede expresar como $T = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$. Ver Figura 2.4.

Diremos que un **rayo** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0, 1)$.

Ejemplo: (Compactación del rayo con residuo S^1) : $X = S^1 \cup \mathcal{S}^*$, donde

$$\mathcal{S}^* = \left\{(r, \theta) : r = 1 + \frac{1}{1+\theta} \text{ y } \theta \geq 0\right\}.$$

En el triodo podemos observar que si tomamos cualesquiera dos puntos p, q podemos caminar de tal forma que de p lleguemos a q. Sin embargo, en la compactación del rayo con residuo S^1, si comenzamos a caminar a partir del punto p éste recorrerá la circunferencia pero no podrá salir de ella, de modo que no podemos llegar al punto q. En este caso el triodo es arco conexo pero la compactación del rayo con residuo S^1 no lo es.

Teorema 2.2.4 *Sea X un espacio topológico. Si X es arco conexo, entonces X es conexo.*

Demostración.

Supongamos que X no es conexo, entonces existen H, K no vacíos, ajenos y cerrados de X tales que $X = H \cup K$. Sean $h \in H$ y $k \in K$, por ser X arco conexo existe $f : I \longrightarrow X$ una función continua tal que $f(0) = h$ y $f(1) = k$. Por la Proposición 1.3.47, $f(I) \subset H$ ó $f(I) \subset K$, sin pérdida de generalidad, $f(I) \subset H$, entonces $h, k \in H$ contradiciendo que H y K son ajenos. Por lo tanto, X es conexo. ∎

El recíproco del teorema anterior no se cumple; como ya habíamos mencionado la compactación del rayo con residuo S^1 (Figura 2.5) es un espacio que no es arco conexo, sin embargo sí es conexo.

Definición 2.2.5 *Sea X un continuo. Diremos que X es* **únicamente arco**

conexo *si cada vez que tomamos dos puntos diferentes* $p, q \in X$*, existe un único arco que los une.*

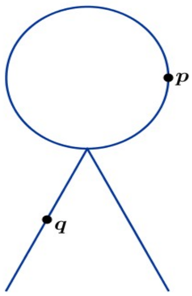


Figura 2.6: Medalla.

El intervalo I, es un continuo únicamente arco conexo pero la **medalla** descrita como: $(x^2 + (y-2)^2 = 1) \cup \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, donde $\mathcal{R}_1$ es el segmento de línea recta de $(0,1)$ a $(-1,-1)$ y $\mathcal{R}_2$ es el segmento de línea recta de $(0,1)$ a $(1,-1)$ (Figura 2.6) no es únicamente arco conexo, pues podemos llegar del punto p al punto q si caminamos hacia la izquierda o derecha del punto p obteniendo dos arcos distintos.

Definición 2.2.6 *Un continuo* X *es* **localmente conexo** *en un punto* x *si para cada abierto* U *de* X *que contiene a* x*, existe un abierto conexo* V *de* X *tal que* $x \in V \subset U$*. Diremos que* X *es* **localmente conexo** *si* X *es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

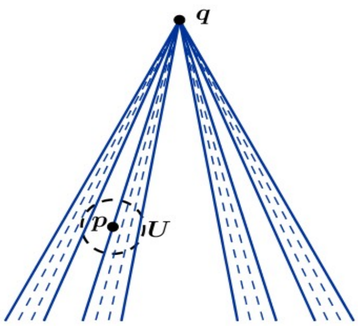
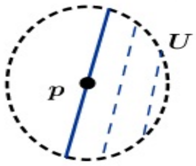


Figura 2.7: Abanico de Cantor.

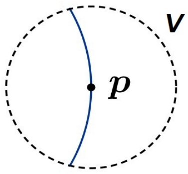
El siguiente ejemplo nos muestra un continuo que no es localmente conexo.

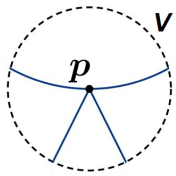
Ejemplo: (Abanico de Cantor) Sea $\mathfrak{C}$ el conjunto de Cantor en el intervalo $[0,1]$, consideremos el conjunto de puntos $(c, 0)$ en $\mathbb{R}^2$, con $c \in \mathfrak{C}$ y unamos los arcos L_c de la forma $(1-t)(c,0) + t\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $t \in [0,1]$. Considere $X = \overline{\bigcup L_c}$. A este continuo se le conoce como abanico de Cantor (en la Figura 2.7 se muestra una representación del abanico de Cantor). Si p es como se muestra en la Figura 2.7, cualquier abierto U que contenga a p se verá como:



el cual no es conexo.

La medalla es ejemplo de un continuo localmente conexo. Pues para cada punto p de la medalla (Figura 2.6) y para cada abierto U que contiene al punto p podemos encontrar $V \subseteq U$ abierto y conexo. V se verá de la forma:



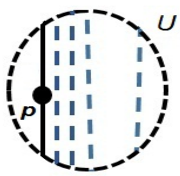


dependiendo donde se encuentre el punto p.

Diremos que un continuo X es de **Peano** si es localmente conexo.

Definición 2.2.7 *Un continuo X es* **localmente arco conexo** *en un punto x si para cada abierto U de X que contiene a x, existe un abierto arco conexo V de X tal que $x \in V \subset U$. Diremos que X es* **localmente arco conexo** *si X es localmente arco conexo en cada uno de sus puntos.*

El triodo (Figura 2.4) es un continuo localmente arco conexo mientras que el continuo sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ descrito a continuación no es localmente arco conexo ya que si tomamos p en J los únicos abiertos de J se ven como:



Ejemplo: Continuo sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ $= \{(x, \text{sen } \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\} \cup J$, donde $J = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,1]\}$. Ver Figura 3.16.

El siguiente ejemplo nos muestra un continuo arco conexo que no es hereditariamente arco conexo:

Ejemplo: D^1 $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ es un continuo localmente arco conexo, sin embargo sen$(\frac{1}{x})$ es un subcontinuo de D^1 que no es arco conexo (Figura 2.8).

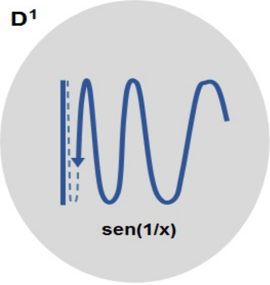


Figura 2.8: D^1.

Con ayuda del siguiente teorema probaremos que todo abierto de un continuo de Peano es arco conexo.

Teorema 2.2.8 *[16, Teorema 8.25, pág. 131] Sea X un continuo de Peano. Si U es un abierto de X, entonces U es localmente arco conexo. En particular, cada continuo de Peano es localmente arco conexo.*

Teorema 2.2.9 *Sea X un continuo de Peano. Si U es un abierto de X, entonces U es arco conexo.*

Demostración.

Caso I) Sea U un abierto, conexo y no vacío de X. Sean $x \in U$ y $E = \{w \in U :$ existe un arco $wx\}$. Como $x \in E$, entonces $E \neq \emptyset$ y por definición $E \subset U$. Mostremos que E es abierto y cerrado en U. Sea $y \in E$ por el Teorema 2.2.8, U es localmente arco conexo, entonces existe V abierto arco conexo tal que $y \in V \subset U$. Así, para $z \in V$ existe un arco zy y por tanto $z \in E$, es decir, $V \subseteq E$ y en consecuencia E es abierto en U. Como $E \subseteq \overline{E}$, veamos que $\overline{E} \subseteq E$. Sea $y \in \overline{E}$, $y \in U$ y sea V un abierto arco conexo que contiene a y, existe pues U es localmente arco conexo, entonces $V \cap E \neq \emptyset$ (Teorema 1.3.15). Sea $z \in V \cap E$, entonces existe un arco yz y un arco zx. Así, $(yz) \cup (zx)$ es un arco yx por lo que $y \in E$. Como $\overline{E} = E$, se tiene que E es cerrado en U. Por ser U conexo y por la Proposición 1.3.21 se debe tener $E = U$. Por lo tanto, U es arco conexo.

Caso II) Sea U abierto no vacío de X. Supongamos que U no es conexo, entonces $U = H \cup K$ con H, K abiertos, ajenos y no vacíos de X y supongamos que H y K son conexos (si no fuera así, podemos escribirlos nuevamente como la unión de dos abiertos, ajenos y no vacíos de X procediendo después de la misma manera). Entonces por el caso I), H y K son arco conexos, en consecuencia U es arco conexo.

■

Corolario 2.2.10 *Sea X un continuo de Peano. Entonces X es arco conexo.*

Definición 2.2.11 *Un continuo X es* **semilocalmente conexo** *en un punto x si para cada abierto U de X que contiene a x, existe un abierto V de X tal que $x \in V \subset U$ y $X - V$ tiene un número finito de componentes. Diremos que X es* **semilocalmente conexo** *si X es semilocalmente conexo en cada uno de sus puntos.*

El triodo (Figura 2.4) es un continuo semilocalmente conexo y la compactación del rayo con residuo S^1 (Figura 2.5) no es semilocalmente conexo.

Teorema 2.2.12 *Sea X un continuo de Peano. Entonces X es semilocalmente conexo en todos sus puntos.*

Demostración.

Sean $x \in X$ y $U \subset X$ abierto que contiene a x. Como X es localmente conexo existe W abierto y conexo de X tal que $p \in W \subset U$. Para cada $y \in X - W$ por la Proposición 1.3.32 y por ser X localmente conexo existe un subcontinuo W_y de X tal que $y \in \text{int}(W_y) \subset W_y \subset X - \{x\}$. Como W es abierto, entonces $X - W$ es compacto así que existen $y_1, y_2, ..., y_n$ en $X - W$ tales que $X - W \subset \bigcup_{i=1}^{n} \text{int}(W_{y_i})$. Sea $V = X - \left(\bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}\right)$. Dado que W_{y_i} es cerrado de X, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}$ es cerrado en X y por tanto se tiene que V es abierto de X. Como $x \notin W_{y_i}$ para cada $i = 1, ..., n$ entonces $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}$. Además, como $W \subset U$, entonces $X - U \subset X - W \subset \bigcup_{i=1}^{n} \text{int}(W_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}$, así $X - \left(\bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}\right) \subset U$. Por lo tanto, X es semilocalmente conexo. ■

Con el siguiente ejemplo vemos que el recíproco del teorema anterior no se cumple.

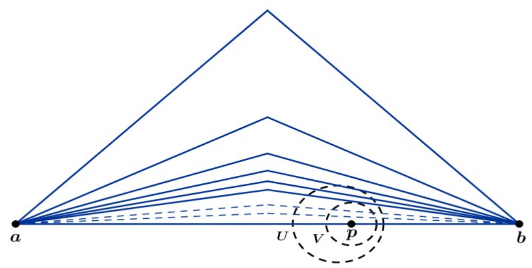


Figura 2.9: Suspensión armónica.

Ejemplo: (Suspensión armónica) Consideremos la sucesión armónica $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Definamos $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$ y para $n \in \mathbb{N}$ $c_n = (0, \frac{1}{n})$. Para

$n \geq 1$, se unen los puntos c_n con a y los puntos c_n con b mediante segmentos de línea recta. Finalmente se une el punto a con b.

Este continuo es semilocalmente conexo pero no es un continuo de Peano pues para los puntos que se encuentran en el segmento ab y cualquier abierto que lo contenga no es conexo.

Definición 2.2.13 *Un continuo X es* **unicoherente** *si $A \cap B$ es conexo, para cualesquiera subcontinuos A, B de X tales que $X = A \cup B$. Diremos que X es* **hereditariamente unicoherente** *si cada subcontinuo propio de X es unicoherente.*

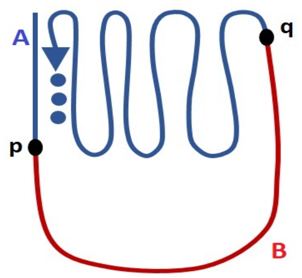


Figura 2.10: Continuo no unicoherente. $A \cap B = \{p, q\}$.

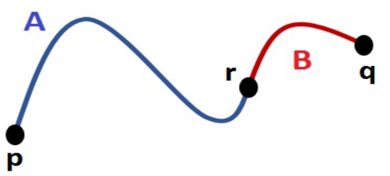


Figura 2.11: Continuo unicoherente. $A \cap B = \{r\}$.

El **Círculo de Varsovia** es un continuo que se obtiene al unir $X =$ continuo sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ con el arco Y que va del punto $(0, -1)$ al punto $(1, \text{sen}(1))$ de tal forma que $X \cap Y = \{(0, -1), (1, \text{sen}(1))\}$. Este continuo no es unicoherente, pues si elegimos A y B como se muestra en la Figura 2.10 se tiene que $A \cap B = \{p, q\}$ lo cual no es conexo. Un continuo que es unicoherente y hereditariamente unicoherente es el arco (Figura 2.11). En general en un arco cualquier intersección no vacía de subcontinuos es un punto o un arco lo cual es conexo.

Definición 2.2.14 *Un continuo X es* **descomponible** *si se puede ver como la unión de dos subcontinuos propios de X. Diremos que X es* **hereditariamente descomponible** *si cada subcontinuo propio de X no degenerado es descomponible.*

Diremos que X es **indescomponible** si no es descomponible.

Ejemplo: El arco (Figura 2.11) y la circunferencia unitaria (Figura 2.3) son continuos descomponibles. El continuo de Knaster (Figura 2.12) es un continuo indescomponible.

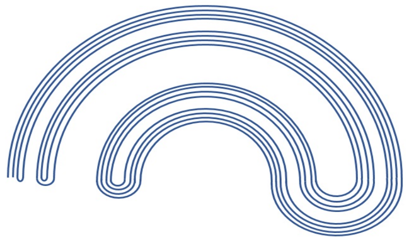


Figura 2.12: Continuo de Knaster.

Continuo de Knaster: Sea C el conjunto de Cantor y consideremos el subconjunto $C_0 = C \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$. Ahora construimos todas las semicircunferencias positivas en $\mathbb{R}^2$ con centro $(\frac{1}{2}, 0)$ y que pasan por los puntos de C_0 (semicircunferencias positivas en $\mathbb{R}^2$ con puntos de C_0 equidistantes al punto $(\frac{1}{2}, 0)$), entonces a la unión de tales circunferencias llamémosle X_0.
Ahora consideremos todas las semicircunferencias en $\mathbb{R}^2$ con coordenadas no positivas con centro en el punto $(\frac{5}{6}, 0)$ y por extremo algunos puntos de C_0; denotemos por X_1 a la unión de estas semicircunferencias. Seguimos el proceso inductivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, donde X_n será la unión de las semicircunferencias en $\mathbb{R}^2$ con coordenadas no positivas que tienen por extremo pares de puntos de C_0 y centro a $(\frac{5}{2(3^n)}, 0)$.

Entonces, el continuo de Knaster se define como $X = X_0 \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \right)$. En la Figura 2.12 se muestran los primeros pasos de la construcción del continuo de Knaster.

Definición 2.2.15 *Un continuo X es* **irreducible** *entre los puntos a y b si ningún subcontinuo propio de X contiene estos dos puntos. A los puntos a y b se les llama* **puntos de irreducibilidad**. *Diremos que un continuo X es irreducible si es irreducible entre dos de sus puntos.*

Hay continuos localmente conexos que son irreducibles y otros que no lo son. Por ejemplo, el arco es un continuo localmente conexo y es irreducible entre sus puntos extremos. El triodo es un continuo localmente conexo que no es irreducible, entre cualesquiera dos puntos hay un arco que los contiene.

También hay continuos no localmente conexos que son irreducibles y otros que no lo son. Por ejemplo, la compactación del rayo con residuo la circunferencia (Figura 2.5) es un continuo que es irreducible entre los puntos p y q mientras que el abanico de Cantor (Figura 2.7) no es un continuo irreducible.

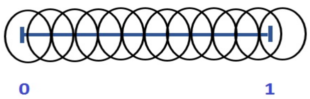
Por el Corolario 2.2.10, podemos decir que si X es un continuo de Peano que no es el intervalo, entonces X no es irreducible. Para ver esto consideremos X un continuo de Peano y $p, q \in X$, como X es arco conexo por ser continuo de Peano (Corolario 2.2.10) existe un arco de p a q que denotaremos por pq. Luego, pq es un subcontinuo propio pues X no es el intervalo, por lo que X no es irreducible entre p y q.

Definición 2.2.16 *Diremos que un continuo X es* **únicamente irreducible** *si es irreducible entre dos únicos puntos.*

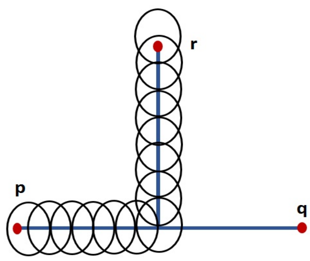
Lema 2.2.17 *[16, Corolario 11.19, pág. 205] Un continuo X es indescomponible si y sólo si cada punto de X es un punto de irreducibilidad de X.*

Definición 2.2.18 *Sea X compacto y sea $C = \{U_1, ..., U_n\}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que C es una* **cadena** *en X si se tiene que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ si y sólo si $\mid j - k \mid \leq 1$. A cada U_k se le llama un* **eslabón** *de la cadena. Si cada eslabón de C es abierto, entonces diremos que C es una* **cadena abierta**. *Si $\varepsilon > 0$ diremos que C es una $\varepsilon-$* **cadena** *si el diámetro de cada eslabón de C es menor que ε.*

Definición 2.2.19 *Sea X un continuo. Diremos que X es* **encadenable** *si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε–cadena que cubre a X. Si $a, b \in X$, entonces X es encadenable de a a b si para cada $\varepsilon > 0$, existe una ε–cadena $C = \{U_1, ..., U_n\}$ que cubre a X tal que $a \in C_1$ y $b \in C_n$.*



Continuo encadenable.



Continuo no encadenable.

2.3 Hiperespacios

Los hiperespacios se definen como colecciones de subconjuntos de un continuo que satisfacen alguna propiedad topológica. La teoría de los hiperespacios tiene sus inicios con los trabajos de F. Hausdorff y L. Vietoris. El hiperespacio 2^X definido como el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados de X fue introducido por L.Vietoris en 1922. Probó algunos hechos básicos acerca de este hiperespacio, por ejemplo: la compacidad de X implica la de 2^X ó bien 2^X es conexo si y sólo si X lo es. Posteriormente en 1923, L. Vietoris y T. Wazewski probaron que la conexidad local de X es equivalente a la de 2^X y a la de $C(X)$ siendo $C(X)$ el conjunto de todos los subcontinuos de X [7].

Existen muchos más resultados acerca de los hiperespacios, una referencia donde se incluye casi todo lo que se conocía de hiperespacios hasta 1978 es el libro de Nadler, Hyperspaces of sets (1978).

Definición 2.3.1 *Sea X un continuo. Se definen los siguientes* **hiperespacios** *de X:*

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\};$$
$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

Notemos que los elementos de $C(X)$ son todos los subcontinuos de X y además $C(X)$ es subconjunto de 2^X por lo que es suficiente dotar a 2^X de una métrica. La métrica considerada es conocida como la métrica de Hausdorff definida por F. Hausdorff en 1914.

Definición 2.3.2 *Sea X un continuo con métrica d. Dados $\varepsilon > 0$, $x \in X$ y $A \in 2^X$, se definen:*

(1) La **bola abierta** *de radio ε y centro en x como:*

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}.$$

(2) La **Nube** *de radio ε y centro en A como:*

$$N_\varepsilon(A) = \{q \in X : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } d(x,q) < \varepsilon\}.$$

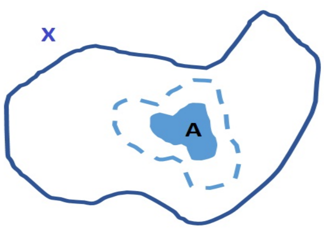


Figura 2.13: Nube de un subconjunto A.

Observemos que si X es un continuo y $A, B \in X$ tales que $A \subseteq B$, entonces se tiene que $A \subseteq N_\varepsilon(B)$.

(3) Dados A y B elementos en 2^X se define la **métrica de Hausdorff** *de A a B como:*

$$H(A,B) = \text{ínf}\left\{\varepsilon > 0 : A \subset N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subset N_\varepsilon(A)\right\}.$$

De aquí en adelante denotaremos por H a la métrica de Hausdorff.

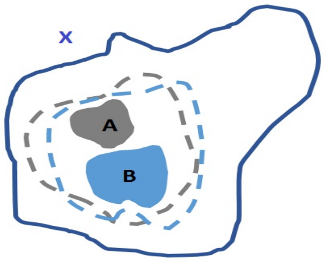


Figura 2.14: Distancia Hausdorff de dos subconjuntos A y B.

Intuitivamente la métrica de Hausdorff nos dice que dos conjuntos están cercanos si están empalmados uno con otro. En la Figura 2.14 podemos observar que los conjuntos A y B no estan cerca, mientras que los conjuntos punteados azul y gris sí están cerca.

En la siguiente proposición mostraremos que la métrica de Hausdorff definida en 2.3.2 (3) es efectivamente una métrica para 2^X y en consecuencia para $C(X)$.

Proposición 2.3.3 *Dados A, B y $C \in 2^X$, la función H descrita anteriormente satisface:*

(a) $H(A, B)$ *está bien definida,*

(b) $H(A, B) \geq 0$,

(c) $H(A, B) = H(B, A)$,

(d) $H(A, B) = 0$ *si y sólo si* $A = B$,

(e) $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$.

Demostración.

(a) Sean $A, B \in 2^X$ no vacíos, por lo que existen $a \in A$ y $b \in B$. Sean $\varepsilon_1 = \max\{d(a, x) : x \in B\}$ y $\varepsilon_2 = \max\{d(b, x) : x \in A\}$, entonces $A \subseteq N_{\varepsilon_1}(B)$ y $B \subseteq N_{\varepsilon_2}(A)$. Consideramos $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, entonces $A \subseteq N_\varepsilon(B)$ y $B \subseteq N_\varepsilon(A)$, por lo que el conjunto $\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq N_\varepsilon(A)\} \neq \emptyset$ y por ser acotado por el cero se puede considerar el ínfimo, por tanto $H(A, B)$ está bien definida.

(b) Por definición $H(A, B)$ es el ínfimo de términos positivos, por tanto $H(A, B) \geq 0$.

(c) Si intercambiamos A con B, el conjunto $H(A, B)$ no cambia, por tanto $H(A, B) = H(B, A)$.

(d) $\Rightarrow|$ Sea $a \in A$ y $\varepsilon > 0$ tal que $H(A,B) < \varepsilon$, por lo cual existe $\delta > 0$ tal que $H(A,B) < \delta < \varepsilon$, es decir, $A \subseteq N_\delta(B)$, entonces existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \delta < \varepsilon$ y $B_\varepsilon(a) \cap B \neq \emptyset$ para cada $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 1.3.15 se tiene que $a \in \overline{B}$ y por ser B cerrado $\overline{B} = B$, entonces $a \in B$ demostrando que $A \subseteq B$. De forma similar se demuestra que $B \subseteq A$, por tanto $A = B$.

$\Leftarrow|$ Si $A = B$, entonces $\inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq N_\varepsilon(A)\} = 0$. Sea $a \in A$, entonces $\inf\{d(a,x) : x \in A\} = 0$ esto implica que $a \in N_\varepsilon(A)$ para cada $\varepsilon > 0$. Por tanto $A \subseteq N_\varepsilon(A)$ para cada $\varepsilon > 0$, así $H(A,A) = 0$.

(e) Sean $A, B, C \in 2^X$, $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$.

$$H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq N_\varepsilon(A)\},$$
$$H(B,C) = \inf\{\delta > 0 : B \subseteq N_\delta(C) \text{ y } C \subseteq N_\delta(B)\},$$
$$H(A,C) = \inf\{\rho > 0 : A \subseteq N_\rho(C) \text{ y } C \subseteq N_\rho(A)\}.$$

Por propiedades de ínfimo (Lema 1.1.9)

$H(A,B)+H(B,C) = \inf\{\varepsilon+\delta > 0 : A \subseteq N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq N_\varepsilon(A) \text{ y } B \subseteq N_\delta(C) \text{ y } C \subseteq N_\delta(B)\}$.

Veamos que si $A \subseteq N_\varepsilon(B)$ y $B \subseteq N_\delta(C)$, entonces $A \subseteq N_{\varepsilon+\delta}(C)$. Sea $a \in A$, como $A \subseteq N_\varepsilon(B)$ existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \varepsilon$, así mismo, como $B \subseteq N_\delta(C)$ existe $c \in C$ tal que $d(b,c) < \delta$, entonces $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) < \varepsilon + \delta$. Por lo que si $a \in A$ existe $c \in C$ tal que $d(a,c) < \varepsilon + \delta$, esto implica que $A \subseteq N_{\varepsilon+\delta}(C)$. De forma similar se demuestra que $C \subseteq N_{\varepsilon+\delta}(A)$. Por tanto $H(A,C) < \varepsilon + \delta$, esto quiere decir que $H(A,C)$ es cota inferior de $\inf\{\varepsilon + \delta > 0 : A \subseteq N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq N_\varepsilon(A) \text{ y } B \subseteq N_\delta(C) \text{ y } C \subseteq N_\delta(B)\}$ y por definición de ínfimo $H(A,C) \leq \inf\{\varepsilon+\delta > 0 : A \subseteq N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq N_\varepsilon(A) \text{ y } B \subseteq N_\delta(C) \text{ y } C \subseteq N_\delta(B)\} = H(A,B) + H(B,C)$. Por tanto $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$.

■

Lema 2.3.4 *Sean X un continuo, $A, B \in 2^X$ y $r > 0$. Entonces $H(A,B) < r$ si y sólo si $A \subset N_r(B)$ y $B \subset N_r(A)$.*

Demostración.

$\Rightarrow|$ Sea $\varepsilon_0 = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subset N_\varepsilon(A)\} = H(A,B)$, entonces $\varepsilon_0 < r$ por lo que $A \subset N_\varepsilon(B) \subset N_r(B)$ y $B \subset N_\varepsilon(A) \subset N_r(A)$.

$\Leftarrow|$ Sea $r \in \{\varepsilon > 0 : A \subset N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subset N_\varepsilon(A)\}$, por propiedad del ínfimo $\inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subset N_\varepsilon(A)\} < r$, por lo tanto $H(A,B) < r$.

■

Capítulo 3

Algunas clases de puntos

El propósito de este capítulo es presentar la existencia de algunos puntos muy particulares como los puntos de no corte, orilla y no bloque en un continuo. Se darán a conocer algunos resultados importantes que se han llegado a obtener en el transcurso de su estudio y a pesar de que para los z-puntos la existencia no es garantizada veremos algunos resultados importantes sobre estos puntos.

Antes de continuar daremos algunas definiciones que serán necesarias para poder caracterizar los puntos de importancia para nosotros.

Definición 3.0.1 *Una* **gráfica finita** *es un continuo que se puede poner como una unión finita de arcos de manera que cada par de ellos se intersectan a lo más en un número finito de puntos.*

El arco, la circunferencia S^1 (Figura 2.3) y el triodo (Figura 2.4) son ejemplos de gráficas finitas.

Definición 3.0.2 *Un* **árbol** *es una gráfica finita que no contiene circunferencias.*

El arco y el triodo (Figura 2.4) son ejemplos de árboles mientras que la medalla (Figura 2.6) y la circunferencia no son árboles. Notemos que por definición los árboles están contenidos en las gráficas finitas.

Definición 3.0.3 *Una* **dendrita** *es un continuo de Peano sin curvas cerradas simples.*

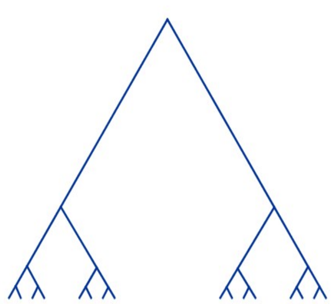


Figura 3.1: Dendrita de Gehman.

Dendrita de Gehman: Se construye empezando en la parte superior, de donde salen dos segmentos de recta, en cuyos extremos inferiores se colocan dos segmentos de recta más pequeños. Repitiendo este proceso una infinidad de veces y finalmente se considera la cerradura de la unión de todos los segmentos de recta construidos. De hecho el conjunto de puntos que se añaden al tomar la cerradura de la unión de los segmentos de recta construidos es el conjunto de Cantor. Ver Figura 3.1.

Definición 3.0.4 *Un* **dendroide** *es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente.*

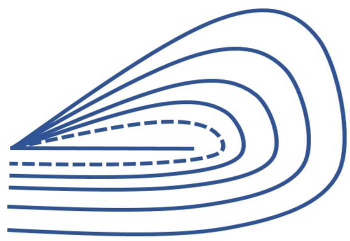


Figura 3.2: Chafaldrana.

Observemos que por definición se tiene que la clase de las dendritas están contenidas en la clase de los dendroides, pero existen dendroides que no son dendritas, por ejemplo el dendroide conocido como la chafaldrana (Figura 3.2) que detallamos a continuación:

Ejemplo: (Chafaldrana) Consideremos la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Definamos $a = (0,0)$, $b = (1,0)$ y para $n \in \mathbb{N}$ sean $b_n = (1, \frac{1}{n})$ y $c_n = (0, -\frac{1}{n})$. Para $n \geq 1$, se unen los puntos b_n con a mediante segmentos de línea recta y los puntos b_n con los puntos c_n mediante arcos α_n tales que $\alpha_n \cap \alpha_m = \emptyset$ para todo $n \neq m$. Finalmente se une el punto a con b.

Definición 3.0.5 *Sea X un continuo. Diremos que un punto p de X es un* **punto extremo***, si p es un punto extremo de cualquier arco de X que lo contenga.*

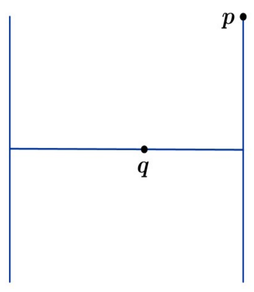


Figura 3.3: Hache.
El punto p es punto extremo y q no es punto extremo.

Hache: $X = (\{0\} \times [0,1]) \cup \left([0,1] \times \{\frac{1}{2}\}\right) \cup (\{1\} \times [0,1])$.

Algunos resultados que se han obtenido a partir de estos puntos son los siguientes:

Teorema 3.0.6 *[13, pág. 13] Sea X un dendroide. Si X tiene exactamente dos puntos extremos, entonces es un arco.*

Es necesario pedir que X sea un dendroide, de lo contrario el teorema anterior no es cierto, un ejemplo de esto es la **aceituna** definida por $\mathcal{R}_1 \cup S^1 \cup \mathcal{R}_2$, donde $\mathcal{R}_1 = [-2,-1] \times \{0\}$ y $\mathcal{R}_2 = [1,2] \times \{0\}$ (Figura 3.4). No es un dendroide pues no es hereditariamente unicoherente ya que existen subcontinuos A y B de X, A la semicircunferencia roja con puntos extremos p y q y B el arco azul con puntos extremos e_1 y e_2 y que contiene a los puntos p y q tales que su unión es X y su intersección no es conexa, $A \cap B = \{p,q\}$. Este continuo tiene dos puntos extremos e_1 y e_2 pero no es un arco.

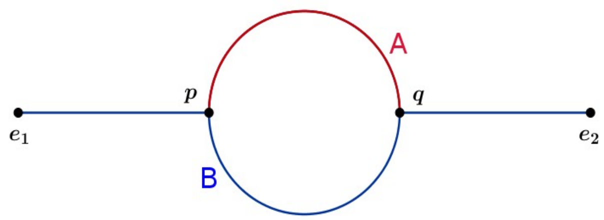


Figura 3.4: Aceituna.

Corolario 3.0.7 *[13, pág. 116] Sea X un dendroide. Si X tiene exactamente tres puntos extremos, entonces se puede poner como la unión de tres arcos que tienen un punto extremo en común.*

Observemos que la unión de tres arcos con un punto en común es homeomorfo a un triodo.

Es necesario pedir que X sea un dendroide, de lo contrario el corolario anterior no se cumple, un ejemplo es el continuo de la Figura 3.5 que es la unión de un arco con puntos extremos a_1, p y la medalla con puntos extremos a_2, a_3. Este continuo no es un dendroide ya que no es hereditariamente unicoherente, tiene tres puntos extremos a_1, a_2 y a_3 pero no es homeomorfo a un triodo.

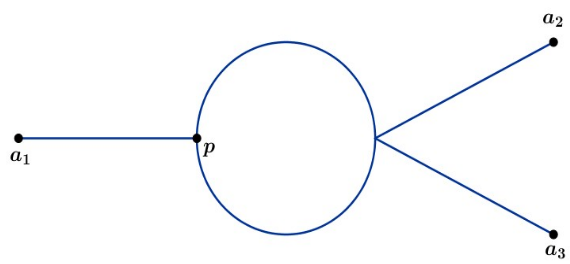


Figura 3.5:

3.1 Puntos de no corte

Una serie de resultados y pruebas en la teoría de continuos dependen del estudio de puntos de no corte. La idea de un punto de no corte en un espacio topológico tiene sus inicios en el año 1920 [15]. Algunas veces, para estudiar estos puntos también se asumen algunas otras propiedades adicionales como compacidad ó los axiomas de separación. Los puntos de no corte en espacios conexos se han estudiado por Honari y Bahrampour en [8].

En esta sección se dará la definición de un punto de no corte, así como el teorema de existencia de puntos de no corte, la localización de estos puntos y algunos de los resultados obtenidos.

Definición 3.1.1 *Dado un continuo X diremos que un punto p de X es un punto de* **no corte** *si $X - \{p\}$ es conexo. Si $X - \{p\}$ no es conexo, entonces diremos que p es un punto de corte.*

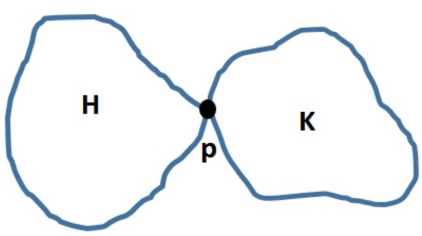


Figura 3.6: p es de corte.

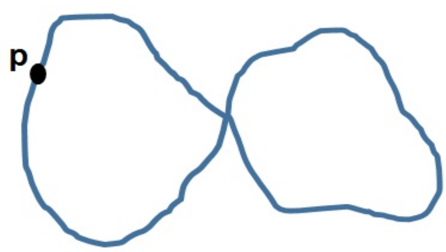


Figura 3.7: p es de no corte.

Intuitivamente un punto de corte es aquel que si lo quitamos separa a X (Figura 3.6) y es de no corte si al quitarlo queda una sola componente (Figura 3.7).

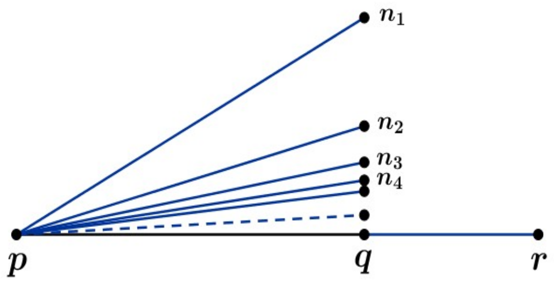


Figura 3.8: Abanico pata alargada.
r es un punto de no corte y q es de corte.

Abanico armónico: Consideremos la sucesión armónica $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Definamos $p = (0,0)$, $q = (1,0)$ y para $n \in \mathbb{N}$ $n_n = (1, \frac{1}{n})$. Para $n \geq 1$, se unen los puntos

n_n con p mediante segmentos de línea recta. Por último se une el punto p con el punto q.

El **Abanico pata alargada** (Figura 3.8) es la unión del abanico armónico con el segmento de línea recta del punto $(1, 0)$ al punto $(\frac{3}{2}, 0)$. En este continuo se puede observar que si quitamos el punto r, $X - \{r\}$ sigue siendo conexo. Ahora veamos que el punto q es de corte. Consideremos H como el abanico armónico sin el punto q y K el intervalo $(q, r]$, entonces $X - \{q\} = H \cup K$ donde H y K son abiertos no vacíos y $H \cap K = \emptyset$, es decir, $X - \{q\}$ es disconexo.

3.1.2 Resultados de puntos de no corte

La existencia de puntos de no corte, cuántos pueden existir y dónde pueden situarse han servido para probar algunos resultados que se pueden ver en [16, Capítulo 9].

El siguiente lema será útil para la demostración del teorema de existencia para puntos de no corte y para esto aclararemos primero la siguiente notación: Si Y es un espacio topológico, escribimos $Y = P \mid Q$ que significa $Y = P \cup Q$, $P \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$, $P \cap Q = \emptyset$ y P, Q son abiertos en Y. Se dirá que $P \cup Q$ es una separación de Y.

Lema 3.1.3 *Sea X un espacio topológico conexo y sean $x, y \in X$ distintos tales que $X - \{x\} = K|L$, $X - \{y\} = M|N$. Si $x \in M$ y $y \in K$, entonces $N \cup \{y\} \subset K$.*

Demostración.

Sabemos por el Teorema 2.1.2 que $N \cup \{y\}$ es conexo. Como $x \in M$ y $x \neq y$ entonces $x \notin N \cup \{y\}$, es decir, $N \cup \{y\}$ es un subconjunto conexo propio de $X - \{x\}$. Además como $y \in K$ entonces $(N \cup \{y\}) \cap K \neq \emptyset$ y puesto que $X - \{x\} = K|L$, esto implica que $N \cup \{y\} \subset K$. ∎

Teorema 3.1.4 *Sea X un continuo no degenerado. Supóngase que X tiene un punto de corte c, es decir, $X - \{c\} = U \mid V$ para algunos U y V abiertos de X. Entonces, existe un punto de no corte de X en U y existe un punto de no corte de X en V.*

Demostración.

Sea $N = \{x \in X : x$ es punto de no corte de $X\}$. Suponga que $N \subset V$, entonces para todo $u \in U$, u es punto de corte. Dado que un espacio métrico es segundo numerable, por la Proposición 1.3.19, X es un espacio separable. Sea $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable de X y sea $n(1) = \text{mín}\ \{n : d_n \in U\}$, $n(1)$ existe pues $n \in \mathbb{N}$. Como $d_{n(1)} \in U$ entonces $X - \{d_{n(1)}\} = E_1|F_1$, sin pérdida de generalidad $c \in E_1$. Por el Teorema 2.1.2, $E_1 \cup \{d_{n(1)}\}$ y

$F_1 \cup \{d_{n(1)}\}$ son conexos y por el Lema 3.1.3, $F_1 \cup \{d_{n(1)}\} \subset U$. Sea $n(2) = \text{mín}$ $\{n : d_n \in F_1\}$, entonces $d_{n(2)} \in U \cap F_1$ y $X - \{d_{n(2)}\} = E_2|F_2$, sin pérdida de generalidad $d_{n(1)} \in E_2$. Haciendo esto inductivamente se tiene que $E_k \cup \{d_{n(k)}\}$ y $F_k \cup \{d_{n(k)}\}$ son conexos para toda $k \in \mathbb{N}$, además $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$. Sea $F = \bigcap_{i=1}^{\infty}(F_i \cup \{d_{n(i)}\})$, como cada $F_i \neq \emptyset$ entonces por el Lema 1.3.28, $F \neq \emptyset$. Sea $z \in F$, entonces $z \in (F_i \cup \{d_{n(i)}\}) \subset U$ para toda $i \in \mathbb{N}$, observemos que $z \neq d_{n(i)}$ y que z es punto de corte de X por lo que $X - \{z\} = H \cup K$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $F_1 \subset K$, como $\bigcap_{i=1}^{\infty}(F_i \cup \{d_{n(i)}\}) \subset F_1$ entonces $d_{n(i)} \subset K$ para toda $i \in \mathbb{N}$, así $H \cap D = \emptyset$ lo cual es una contradicción pues H es abierto y D es subconjunto denso. En consecuencia $N \cap U \neq \emptyset$ y se tiene que U tiene al menos un punto de no corte de X. ∎

Corolario 3.1.5 *Sea X un continuo no degenerado. Entonces X tiene al menos dos puntos de no corte.*

Corolario 3.1.6 *Sea X un continuo no degenerado y sea N el conjunto de todos los puntos de no corte de X. Entonces ningún subconjunto propio conexo de X contiene a N.*

Demostración.

Supongamos que existe A subconjunto propio conexo de X tal que $N \subset A$. Sea $x \in X - A$, entonces $X - \{x\} = H \cup K$, H y K abiertos, ajenos y no vacíos de X. Como A es conexo de $X - \{x\}$ sin pérdida de generalidad $A \subset H$ lo cual implica que $N \subset H$, contradiciendo así el Teorema 3.1.4. ∎

El siguiente teorema nos da alguna información con respecto a la ubicación de puntos de no corte.

Teorema 3.1.7 *Sean X un continuo, A un subcontinuo propio de X, y K una componente de $X - A$. Entonces hay un punto de no corte p de $K \cup A$ tal que $p \in K$. Además ese punto p es también un punto de no corte de X.*

Demostración.

Sabemos por el Teorema 2.1.7 que $K \cup A$ es un continuo. Como $A \subset K \cup A$, entonces A es un subcontinuo propio de $K \cup A$. Por el Corolario 3.1.5 existe p punto de no corte de $K \cup A$ y por el Corolario 3.1.6, $p \in K$. Ahora veamos que p es punto de no corte de X. Observemos que $X - \{p\} = [(K \cup A) - \{p\}] \cup [\cup\{L \cup A : L$ es componente de $X - A$ y $L \neq K\}]$, $(K \cup A) - \{p\}$ es conexo y cada $L \cup A$ es conexo (Teorema 2.1.7). Como la intersección de estos conjuntos es no vacía aplicamos el Corolario 1.3.23, entonces $X - \{p\}$ es conexo, es decir, p es un punto de no corte de X. ∎

Teorema 3.1.8 *[16, Teorema 9.28, pág. 153] Sea X un continuo no degenerado. Entonces X es un árbol si y sólo si X tiene sólo un número finito de puntos de no corte.*

El uso de los puntos de no corte ha permitido dar una caracterización más del arco, como se ve en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.9 *Un continuo X es un arco si y sólo si X tiene exactamente dos puntos de no corte.*

Demostración.

$\Rightarrow|$ Supongamos que X es un arco, sin pérdida de generalidad $X = [0, 1]$. Veamos que si $x \in (0, 1)$ entonces x es punto de corte de X. Sean $H = [0, x)$ y $K = (x, 1]$ subconjuntos de $[0, 1]$. Entonces H, K son subconjuntos abiertos de X tales que $H \cap K = \emptyset$ y $X - \{x\} = H \cup K$, por lo tanto x es de corte de X. Por otra parte, sea $A = (0, 1)$ que es un subconjunto propio conexo de X entonces las componentes de $X - A$ son $C_1 = \{0\}$ y $C_2 = \{1\}$. Por el Teorema 3.1.7, existen p y q puntos de no corte de X tales que $p \in C_1$ y $q \in C_2$, entonces $p = 0$ y $q = 1$. Así X tiene exactamente dos puntos de no corte.

$\Leftarrow|$ Supongamos que X es un continuo con exactamente dos puntos de no corte p y q. Por el Teorema 3.1.8, X es un árbol y por tanto una gráfica y por definición las gráficas son arco conexas, entonces existe un arco α en X de p a q. Por el Corolario 3.1.6, $\alpha = X$, es decir, X es un arco.

■

Una caracterización clásica de la curva cerrada simple fue dada por H.Bing y es la siguiente.

Teorema 3.1.10 *[16, Proposición 9.28, pág. 153] Un continuo X no degenerado es una curva cerrada simple si no es cortado por uno de sus puntos sino por cada par de sus puntos.*

Por ejemplo el círculo de Varsovia (Figura 3.9) no es una curva cerrada simple, pues si quitamos cualquier punto es conexo y además para p y q como en la Figura 3.9, $X - \{p, q\}$ es conexo.

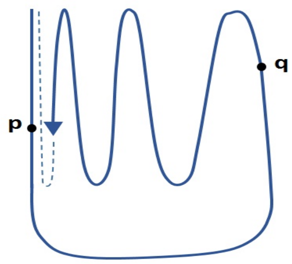


Figura 3.9: Círculo de Varsovia.

Otro de los resultados que se obtuvieron acerca de los puntos de no corte y que permitieron caracterizar a las dedritas es el siguiente teorema.

Teorema 3.1.11 *[16, Teorema 10.7, pág. 168] Un continuo no degenerado X es una dendrita si y sólo si cada punto de X es un punto de corte de X o un punto extremo de X.*

Es necesario pedir que X sea una dendrita, de lo contrario el teorema anterior no se cumple. La **paleta** definida por $\mathcal{P} = S^1 \cup \mathcal{R}$, donde $\mathcal{R} = ([1,2] \times \{0\})$ (Figura 3.10) es un continuo donde p es un punto de no corte pero no es un punto extremo.

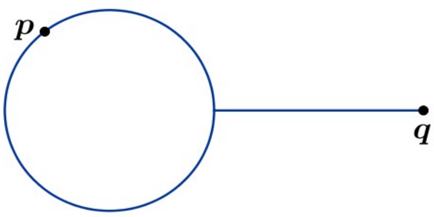


Figura 3.10: Paleta.

3.2 Puntos orilla

El concepto de punto orilla en dendroides surgió cuando se estudio la propiedad del hiperespacio cónico de un dendroide suave. Resultó ser una herramienta útil para comprender la estructura de los dendroides, [14]. Posteriormente se estudiaron las relaciones de los puntos orilla y de no corte en dendroides y se utilizaron a estos puntos para caracterizar a las dendritas [18].

La existencia de puntos orilla ha sido una generalización en teoría de continuos, correspondiente al teorema de existencia de puntos de no corte en un continuo y el cual fue probado por R. Leonel en [12]. En esta sección se dará la definición de un punto orilla, así como el teorema de existencia de estos puntos y algunas caracterizaciones de continuos que se tienen a partir de estos puntos.

Definición 3.2.1 *Dado un continuo X diremos que un punto p de X es un punto* **orilla** *si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subcontinuo C de X tal que $p \notin C$ y $H(C, X) < \varepsilon$.*

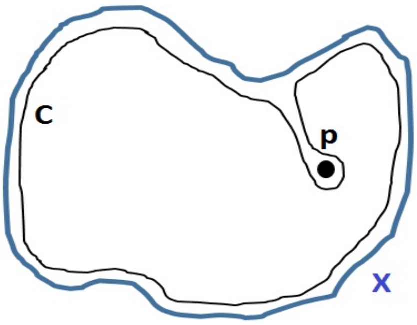


Figura 3.11: p punto orilla.

Intuitivamente un punto orilla se puede ver como en la Figura 3.11, donde $C \in C(X)$.

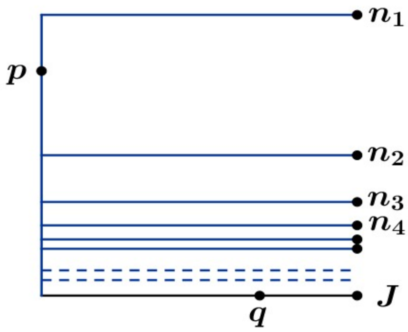


Figura 3.12: Peine.
q es un punto orilla y p no es orilla.

Ejemplo: (Peine) Sean $A_j = [0,1] \times \left\{\frac{1}{j}\right\}$ para $j \in \mathbb{N}$, $I = (\{0\} \times [0,1])$ y $J = ([0,1] \times \{0\})$. Consideremos al continuo

$$X = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cup I \cup J.$$

Este continuo X es conocido como el peine.

Veamos que el punto q del peine (Figura 3.12) es un punto orilla. Sea $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Sea entonces

$$A = \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \cup (\{0\} \times [0,1]),$$

el cual es un subcontinuo de X que no contiene a q (Figura 3.13). Queremos demostrar que $H(A, X) < \varepsilon$, es decir, $A \subseteq N(\varepsilon, X)$ y $X \subseteq N(\varepsilon, A)$.

Sea $x \in A$, como $A \subseteq X$ entonces $x \in X$ y $d(x, x) = 0 < \varepsilon$, por tanto $A \subseteq N(\varepsilon, X)$. Ahora sea $\overline{x} \in X$ tal que $\overline{x} \notin A$ (pues si $\overline{x} \in A$ términamos), entonces sin pérdida de generalidad $\overline{x} = (x, a_m)$, $0 \leq a_m < \frac{1}{n}$, elegimos $a = (x, a_n)$ el cual está contenido en A_n y (x, a_m) donde $(x, a_n) \in \{x\} \times [0, 1]$, entonces $d((x, a_m), (x, a_n)) < \frac{1}{n} < \varepsilon$, por tanto $X \subseteq N(\varepsilon, A)$. Demostrando así que q es un punto orilla.

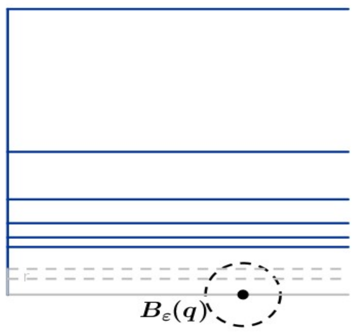


Figura 3.13: $A \in C(X)$.

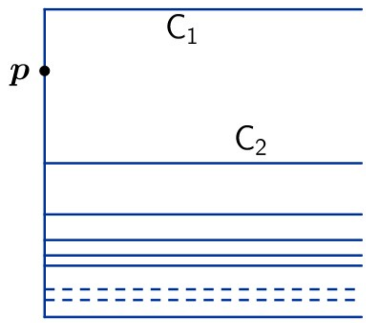


Figura 3.14: $X - \{p\} = C_1 \cup C_2$.

Más adelante vamos a probar que si p es un punto de corte este no puede ser orilla (Proposición 3.2.19). Como se muestra en la Figura 3.14, el punto p es un punto de corte por lo que p no puede ser orilla.

3.2.2 Resultados de puntos orilla

La prueba del teorema de existencia se basa en el siguiente resultado que fue probado por H. Bing.

Teorema 3.2.3 *[3, Teorema 5, pág. 500] Sean X un continuo y A subconjunto propio de X. Entonces existe un punto $x \in X - A$ tal que $\bigcup\{C \in C(X) : C \subset X - \{x\}$ y $C \cap A \neq \emptyset\}$ es densa en X.*

El siguiente teorema es un resultado importante que nos permite establecer la existencia de puntos orilla.

Teorema 3.2.4 *Sea X un continuo no degenerado. Entonces X tiene al menos dos puntos que son orilla.*

Demostración.

Sea $x \in X$. Por el Teorema 3.2.3, existe un punto $q \in X - \{x\}$ tal que $\bigcup\{A \in C(X) : x \in A \text{ y } q \notin A\}$ es densa en X. Sea $\varepsilon > 0$, por ser X compacto existen $U_1, U_2, ..., U_n$ abiertos de X tales que $\text{diam}(U_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, $i = 1, 2, ...n$ y $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Como $\bigcup\{A \in C(X) : x \in A \text{ y } q \notin A\}$ es densa en X, entonces para cada U_i abierto existe un subcontinuo A_i en $X - \{q\}$ tal que $A_i \cap U_i \neq \emptyset$ y $x \in A_i$ para cada $i = 1, 2, ...n$. Consideremos $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, es cerrado por ser unión finita de cerrados, en consecuencia es compacto y es conexo por ser unión de conexos con intersección no vacía (Corolario 1.3.22), por lo que A es un subcontinuo que no contiene a q. Veamos que $H(A, X) < \varepsilon$. Como $A \subset X$ sólo basta ver que $X \subset N(\varepsilon, A)$ (Lema 2.3.4). Sea $y \in X$, entonces $y \in U_i$ para algún $i = 1, 2, ...n$ y existe $a_i \in A_i$ tal que $d(a_i, u_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, así $d(y, a_i) < \varepsilon$ y por tanto $X \subset N(\varepsilon, A)$. Así q es un punto orilla de X. Si hacemos $x = q$, existe p distinto de q tal que p es punto orilla de X, entonces X tiene al menos dos puntos orilla. ∎

Definición 3.2.5 *Diremos que un subconjunto A no vacío de un continuo X es un* **conjunto orilla** *si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subcontinuo C de X tal que $A \cap C = \emptyset$ y $H(C, X) < \varepsilon$.*

Se ha estudiado la relación de los puntos orilla con los puntos de centro fuerte en dendroides por V. Nall [17]. En su estudio muestra que si $O(X)$ es el conjunto de puntos orilla y CF es el conjunto de puntos de centro fuerte, entonces estos conjuntos son mutuamente excluyentes. Esta relación nos proporciona una forma de saber que puntos no pueden ser orilla.

Definición 3.2.6 *Sea X un continuo. Diremos que un punto $p \in X$ es un* **centro fuerte***, si existen dos puntos $b, c \in X$ (distintos de p) y dos conjuntos abiertos y no vacíos U y V de X que contienen a b y c, respectivamente, tales que cada arco de U a V contiene a p.*

En el abanico de Cantor (Figura 2.7), el punto q es un centro fuerte y cualquier otro punto no es centro fuerte.

Proposición 3.2.7 *Sean X un continuo hereditariamente arco conexo y $p \in X$. Si p es un centro fuerte de X, entonces p no es un punto orilla de X.*

Demostración.

Sea p un centro fuerte de X respecto a los punto x y y. Supongamos que p es un punto orilla de X. Sean U, V abiertos de X tales que $x \in U$ y $y \in V$. Por ser abiertos U y V, existen r_1 y r_2 tales que $B_{r_1}(x) \subset U$ y $B_{r_2}(y) \subset V$. Consideremos $r = \text{mín}\{r_1, r_2\}$ y $\varepsilon = \frac{r}{2}$, entonces existe $C \in C(X)$ tal que $p \notin C$

y $H(X, C) < \varepsilon$. Así, existe $u \in C$ tal que $d(x, u) < \varepsilon$ lo cual implica que $u \in U$ y $C \cap U \neq \emptyset$, similarmente $C \cap V \neq \emptyset$. Sean $u_1 \in C \cap U$ y $u_2 \in C \cap V$. Por ser X hereditariamente arco conexo, existe un arco α en C de u_1 a u_2 y por ser p centro fuerte de X respecto a los abiertos U y V se tiene que $p \in \alpha$ y en consecuencia $p \in C$, por tanto p no es un punto orilla de X. ∎

Es necesario pedir que X sea hereditariamente arco conexo, de lo contrario la proposición anterior no es cierta. Por ejemplo, el círculo de Varsovia es un continuo el cual no es hereditariamente arco conexo y se puede ver inmediatamente que p es un centro fuerte y también es un punto orilla de X.

Proposición 3.2.8 *Sean X un dendroide y A subcontinuo de X, entonces A es arco conexo.*

Demostración.

Sean $A \in C(X)$ y $x, y \in A$ distintos, consideremos α un arco en X que contiene a x y y como puntos extremos. Observemos que $A \cap \alpha$ es conexo ya que X es hereditariamente unicoherente, como $x, y \in \alpha \cap A \subset \alpha$, entonces $\alpha \cap A = \alpha$ por lo que $\alpha \subset A$. Así α es un arco en A que contiene a x y y, es decir, A es arco conexo. ∎

Corolario 3.2.9 *Sean X un dendroide y p un centro fuerte de X. Entonces p no es un punto orilla de X.*

Demostración.

Sea p un centro fuerte de X. Por definición X es arco conexo y por la Proposición 3.2.8, X es hereditariamente arco conexo. Finalmente, por la Proposición 3.2.7, p no es un punto orilla. ∎

La relación entre los puntos orilla y centro fuerte ha servido para demostrar que si un dendroide tiene un punto no orilla, entonces la union finita de arco componentes de un conjunto de puntos orilla es un conjunto orilla.

Teorema 3.2.10 *[17, Teorema 4, pág. 2170] Si X es un dendroide que contiene un centro fuerte, y A es la unión de un número finito de arco componentes de $O(X)$, entonces A es un conjunto orilla.*

Lema 3.2.11 *Sean X un dendroide y $A \subset X$ tal que $X - A$ es arco conexo, entonces A es un conjunto orilla si y sólo si $int(A) = \emptyset$.*

Demostración.

$\Rightarrow|$ Supongamos que $int(A) \neq \emptyset$, entonces para $x \in int(A)$ existe $r > 0$ tal que $x \in B_r(x) \subset int(A)$. Sea $\varepsilon = \frac{r}{2}$, entonces existe $C \in C(X)$ tal que $A \cap C = \emptyset$ y $H(X, C) < \varepsilon$. Para $x \in A$ existe $y \in C$ tal que $d(x, y) < \varepsilon < r$, lo cual implica que $y \in B_r(x)$ y por tanto $y \in A$ contradiciendo el hecho que $A \cap C = \emptyset$. Así, $int(A) = \emptyset$.

$\Leftarrow|$ Supongamos que $X - A$ es arco conexo y que $int(A) = \emptyset$. Sea $x \in X - A$ y sea $\varepsilon > 0$. Por ser X compacto existen $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ abiertos de X tales que diam$(U_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $i = 1, 2, ...n$ y $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Como $int(A) = \emptyset$ se tiene que $U_i \not\subseteq A$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. Sea $z_i \in U_i - A$, entonces existe un arco $z_i x$ ya que $X - A$ es arco conexo. Consideremos $C = \bigcup_{i=1}^{n} xz_i$, entonces C es cerrado por ser unión finita de cerrados, en consecuencia es compacto. Además, es conexo por ser unión de conexos con intersección no vacía, por lo tanto C es un subcontinuo de X y $C \cap A = \emptyset$. Como $C \subset X$, $C \subset N_\varepsilon(X)$, por el Lema 2.3.4 sólo basta ver que $X \subset N_\varepsilon(C)$. Sea $x \in X$, entonces $x \in U_i$ para algún $i \in \{1, 2, ..., n\}$ por lo que existe $z_i \in U_i$ tal que $d(x, z_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, $H(C, X) < \varepsilon$. En consecuencia A es un conjunto orilla.

■

Lema 3.2.12 *Sean X un dendroide y $p \in X$. Si C es un arco componente de $X - \{p\}$ e $int(C) = \emptyset$, entonces C es un conjunto orilla.*

Demostración.

Por la Proposición 3.2.8, $X - C$ es arco conexo y por el Lema 3.2.11, C es un conjunto orilla. ■

El siguiente resultado probado por R. Leonel en [12], nos dice donde podemos encontrar los puntos orilla en continuos irreducibles.

Teorema 3.2.13 *Sean X un continuo irreducible y p un punto de irreducibilidad de X. Entonces p es un punto orilla de X.*

Demostración.

Sean p y q puntos de irreducibilidad de X y sea $\varepsilon > 0$. Por ser X compacto existen $U_1, U_2, ..., U_n$ abiertos de X tales que diam$(U_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ y $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Por el Lema 2.1.9, $K(q)$ es densa en X y $p \notin K(q)$, entonces para cada U_i de X existe $A_i \subset X - \{p\}$ subcontinuo de X tal que $q \in A_i$ y $p \notin A_i$ para $i = 1, 2, ...n$. Consideremos $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, A es cerrado por ser unión finita de cerrados, en consecuencia compacto y es conexo por ser unión de conexos con intersección no vacía. Por lo tanto A es un subcontinuo que no contiene a p. Veamos que $X \subset N_\varepsilon(A)$. Sea $x \in X$, entonces $x \in U_i$ para algún $i \in \{1, 2, ..., n\}$

por lo que existe $y \in U_i$ tal que $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$, luego para y existe $z \in A_i$ tal que $d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ y por tanto $d(x, z) < \varepsilon$ lo cual implica que $X \subset N_\varepsilon(A)$. Por lo tanto p es un punto orilla de X. Similarmente se tiene que q es un punto orilla de X. ∎

Lema 3.2.14 *Sea X un continuo únicamente irreducible entre los puntos x y y. Si B es un subcontinuo indescomponible de X, entonces $B \cap \{x, y\} = \emptyset$.*

Demostración.

Sea B subcontinuo indescomponible de X y sean x, y los únicos puntos de irreducibilidad de X. Supongamos que $B \cap \{x, y\} \neq \emptyset$. Si pérdida de generalidad supongamos que $x \in B$. Sea $z \in B$ tal que $z \neq x$ y $z \in K(x)$ en B. Si $z = y$, entonces $\{x, y\} \subset B$. Luego, por ser B indescomponible todos sus puntos son de irreducibilidad (Lema 2.2.17). Por lo tanto $z \neq y$, así z no es un punto de irreducibilidad de X, por lo que existe W_1 subcontinuo propio de X tal que $\{z, y\} \subset W_1$. Por otra parte, $z \in K(x)$ en B, entonces existe W_2 subcontinuo de B tal que $\{z, x\} \subset W_2$. Sea $W = W_1 \cup W_2$, es cerrado por ser unión de cerrados y es conexo por ser unión de conexos con intersección no vacía. Asi W es un subcontinuo propio de X y es propio ya que B es un continuo indescomponible y $B \neq W_1 \cup W_2$. Por lo tanto W es un subcontinuo propio que contiene a x y a y lo cual es una contradicción ya que $\{x, y\}$ son puntos de irreducibilidad de X, así $x \notin B$. ∎

Corolario 3.2.15 *[12, Corolario 2, pág. 437]Sea X un continuo irreducible y hereditariamente descomponible. Si p es un punto orilla de X, entonces p es un punto de irreducibilidad.*

Teorema 3.2.16 *Sean X un continuo únicamente irreducible y $p \in X$. Si p es un punto orilla de X, entonces p es un punto de irreducibilidad de X.*

Demostración.

Por el Lema 2.2.17, X es descomponible. Por lo que existen Y y Z subcontinuos propios de X tales que $X = Z \cup Y$. Sea p un punto orilla de X y supongamos que X es hereditariamente descomponible, entonces por el Corolario 3.2.15, p es punto de irreducibilidad de X. Ahora, supongamos que X no es hereditariamente descomponible y que p no es punto de irreducibilidad de X. Sean $z, y \in X$ tal que X es irreducible entre z y y, con $z \in Z$ y $y \in Y$ y $\{y, p\} \subset Y$ y $\{z, p\} \subset Z$, $X = Y \cup Z$. Como $\{y, z\} \cap Y \neq \emptyset$ y $\{y, z\} \cap Z \neq \emptyset$, por el Lema 3.2.14, Y y Z son descomponibles, entonces existen $A_1, B_1 \in C(Z) - \{Z\}$ y $A_2, B_2 \in C(Y) - \{Y\}$ tales que $Z = A_1 \cup B_1$, $Y = A_2 \cup B_2$, $z \in A_1$ y $y \in A_2$.
Si $p \in A_1$, entonces $A_1 \cup Y$ es un subcontinuo propio que contiene a y y a z lo cual no es posible por que y y z son puntos de irreducibilidad, por tanto $p \notin A_1$. Similarmente $p \notin A_2$. Sean $r_1 = \text{mín}\{d(z, B_1), d(z, Y)\}$ y $r_2 = \text{mín}\{d(y, Z), d(y, B_2)\}$. Como $B_1 \cup Y$ es cerrado, entonces $X - (B_1 \cup Y)$ es abierto en X. Para $r = \frac{\text{mín}\{r_1, r_2\}}{2}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < r$ y $B_\varepsilon(z) \subset X - (B_1 \cup Y) \subset A_1$. Luego, por ser p

un punto orilla de X existe $C \in C(X)$ tal que $p \notin C$ y $H(X, C) < \varepsilon$, teniendo así $C \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset$. Consideremos $W = A_1 \cup C \cup A_2$. Entonces W es un subcontinuo de X y es propio ya que $p \notin W$ y $\{y, z\} \subset W$, contradiciendo el hecho de ser y y z puntos de irreducibilidad de X. Por lo tanto, p es un punto de irreducibilidad de X. ■

Teorema 3.2.17 *Sea X un continuo no degenerado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *X es únicamente irreducible;*

(ii) *X tiene sólo dos puntos orilla.*

Demostración.

(i)⇒ (ii) Supongamos que p y q son los únicos puntos de irreducibilidad de X. Por el Teorema 3.2.13, p y q son puntos orilla. Como X es únicamente irreducible para cualquier punto x distinto de p y q, x no es punto de irreducibilidad y por el Teorema 3.2.16, x no es punto orilla. Así p y q son los únicos puntos orilla de X.

(ii)⇒ (i) Supongamos que X tiene sólo dos puntos orilla. Supongamos que X no es irreducible, entonces existe $A \in C(X) - \{X\}$ tal que $\{p, q\} \subset A$. Sea $x \in X - A$, por el Teorema 3.2.3, el conjunto $D = \bigcup\{C \in C(X) : C \subset X - \{x\}$ y $A \cap C \neq \emptyset\}$ es denso en X. Afirmación: x es un punto orilla de X. Sean $\varepsilon > 0$ y $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ abiertos y no vacíos de X tales que $\mathrm{diam}(U_i) < \varepsilon$ para cada $i = 1, 2, ...n$, existen pues X es compacto y además $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Como D es denso en X, para cada U_i existe $C_i \in D$ tal que $U_i \cap C_i \neq \emptyset$. Sea $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, es compacto por ser C_i cerrado para cada $i = 1, 2, ..., n$ y es conexo por ser unión de conexos con intersección no vacía, por lo tanto C es un subcontinuo de X y $x \notin C$. Veamos que $X \subset N_\varepsilon(C)$. Sea $x \in X$, entonces $x \in U_i$ para algún $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y por tanto existe $c \in C_i$ tal que $d(x, c) < \varepsilon$, así x es un punto orilla de X lo cual es una contradicción ya que p y q son los únicos puntos orilla de X, por tanto X es irreducible entre p y q. Por el Teorema 3.2.13, X es únicamente irreducible ya que cualquier otro punto de irreducibilidad de X sería punto orilla de X.

■

Al igual que para los puntos de no corte, el arco ha sido caracterizado en términos de puntos orilla como se ve en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.18 *[12, Teorema 6, pág. 439] Sea X un continuo no degenerado. Entonces X es un arco si y sólo si cada subcontinuo B de X tiene sólo dos puntos orilla.*

En dendroides se demuestra que cada punto extremo es un punto orilla el recíproco no es cierto por tanto los puntos orilla que no son puntos extremos V. Lara e I. Puga los denominaron puntos orilla impropios [18].

Proposición 3.2.19 *Sean X un continuo y $p \in X$. Si p es un punto orilla, entonces p es un punto de no corte.*

Demostración.

Supongamos que p es un punto de corte, entonces existen U, V abiertos, no vacíos y ajenos tales que $X - \{p\} = U \cup V$. Por el Teorema 2.1.2, $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$ son subcontinuos de X, consideremos así $\varepsilon_1 = H(U \cup \{p\}, V \cup \{p\})$. Sea $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$, como p es un punto orilla existe un subcontinuo A en $X - \{p\}$. Por ser A conexo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \subset U$, pero esto implica que $H(A, X) > \varepsilon$, lo cual es una contradicción ya que p es punto orilla. Por tanto p es un punto de no corte. ■

En base a este resultado podemos decir que si $D(X)$ es el conjunto de puntos de corte de X y $O(X)$ es el conjunto de puntos orilla de X, entonces estos conjuntos son mutuamente excluyentes.

El recíproco de la proposición 3.2.19 no se cumple en general y el ejemplo se dará más adelante. Sin embargo, agregando condiciones al continuo puede ser cierto, como en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.20 *Sea X un continuo localmente conexo, entonces X sólo tiene dos tipos de puntos, de corte y orilla.*

Demostración.

Por la Proposición 3.2.19 si p es orilla, entonces p es de no corte. Ahora mostremos que si p es de no corte, entonces p es orilla. Sean $\varepsilon > 0$ y U abierto de X tal que $p \in U$ y $\text{diam}(U) < \varepsilon$. Como X es localmente conexo por el Teorema 2.2.12, X es semilocalmente conexo y por tanto existe un abierto V de X tal que $p \in V \subset U$ y $C_1, C_2, ..., C_n$ son las componentes de $X - V$. Sea $c_i \in C_i$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. Como p es un punto de no corte de X, $X - \{p\}$ es conexo y además es abierto, así por el Teorema 2.2.9, $X - \{p\}$ es arco conexo. Sean α_i arcos en $X - \{p\}$ que van de c_i a c_{i+1} para $i = 1, 2, ..., n-1$ y α_n un arco en $X - \{p\}$ de c_n a c_1. Como C_i es cerrado en $X - V$ y por ser $X - V$ cerrado en X, C_i es cerrado en X para cada $i = 1, 2, ..., n$ y por tanto $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ es cerrado en X. Similarmente $\bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i$ es cerrado en X. Consideremos $C = \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i\right)$, entonces C es cerrado en X. Como α_i es conexo y $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i = 1, 2, ..., n$, $\bigcap_{i=1}^{n} \alpha_i \neq \emptyset$ y además $C_i \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \neq \emptyset$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Por el Teorema 1.3.22, $\bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i$ es conexa y en consecuencia C es conexo. Así, C es un subcontinuo de X que no contiene a p. Veamos que $H(C, X) < \varepsilon$. Basta ver que $X \subset N_\varepsilon(C)$. Sea $x \in X$, como $X = (X - V) \cup V = \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) \cup V$ si $x \in C_i$ para algún $i \in \{1, 2, ..., n\}$ acabamos. Supongamos que $x \in V$, recordemos que $V \subset U$ por lo que existe $u \in U$ tal que $u \notin V$ y $d(x, u) < \varepsilon$. Por lo tanto si $p \in X$, entonces p es de corte ó p es orilla. ■

3.3 Puntos de no bloque

El concepto de bloqueadores fue introducido por A. Illanes y P. Krupski en [9], donde estudian los conjuntos bloqueadores en varios continuos y denominan a estos conjuntos bloqueadores como conjuntos de tapas para los continuos localmente conexos. Posteriormente se introduce la noción de bloqueador en hiperespacios desarrollando una teoría general sobre estos conjuntos. Los resultados que se obtienen muestran que los conjuntos bloqueadores aparecen como fenómenos importantes y naturales en los hiperespacios.

La definición de punto de no bloque fue dado por J. Bobok, P. Pyrih y B. Vejnar en [4], donde después del resultado obtenido por R. Leonel (Teorema 3.2.4, [12]) observaron que estos puntos no sólo son puntos orilla sino que satisfacen una propiedad más fuerte. A estos puntos los llamaron puntos no bloqueables y posteriormente en [4] demuestran su existencia en continuos no degenerados.

Definición 3.3.1 *Dado un continuo X diremos que un punto p de X es un punto de* **no bloque** *si existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in N}$ de subcontinuos de X tales que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, $p \notin A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n$ es densa en X. Si no existe tal sucesión $\{A_n\}_{n\in N}$ de subcontinuos de X, entonces diremos que p bloquea.*

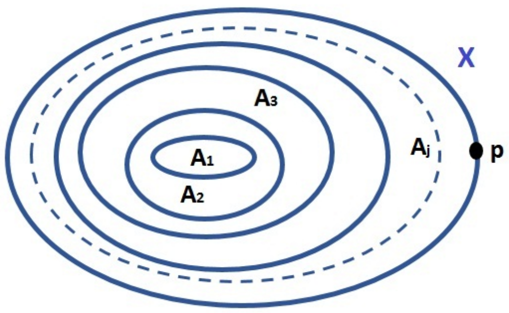


Figura 3.15: $A_n \subset A_{n+1}$, con $A_n \in C(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Intuitivamente p es de no bloque, pues podemos crecer casi desde cualquier punto sin pasar por p y llegar al continuo total (Figura 3.15).

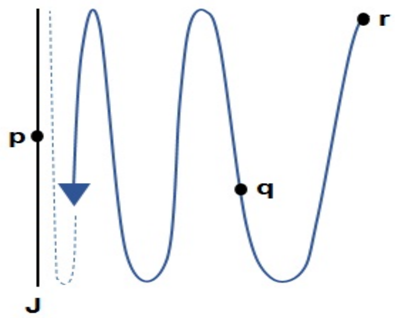


Figura 3.16: Continuo sen$\left(\frac{1}{x}\right)$.
p es un punto de no bloque y q es un punto que bloquea.

En la Figura 3.16, el punto p es un punto de no bloque. Consideremos $p_1, p_2, p_3, \ldots$, puntos en el rayo del continuo sen$\left(\frac{1}{x}\right)$ como se muestra en la Figura 3.18 y sea A_n el arco con extremos r y p_n, entonces $A_n \in C(X)$ y $A_n \subset A_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y además $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = X$.

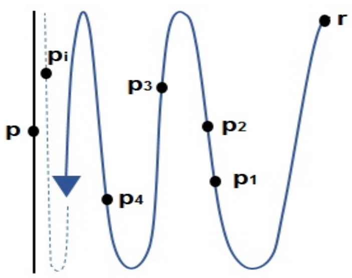


Figura 3.17: sen$\left(\frac{1}{x}\right)$.

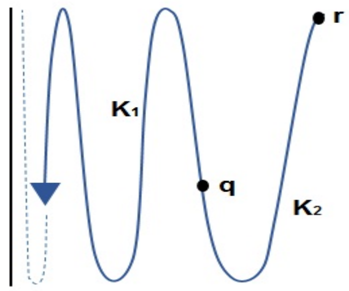


Figura 3.18: $X - \{q\} = K_1 \cup K_2$.

Por otro lado q es un punto que bloquea. Queremos encontrar una sucesión creciente de elementos de $C(X)$ tales que no contengan a q, entonces necesariamente $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K_1$ ó bien $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K_2$ (Figura 3.18) pues cada A_n es conexo y además la intersección de A_n y A_{n+1} es no vacía, sin embargo, $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \neq X$.

3.3.2 Resultados de puntos de no bloque

El siguiente resultado nos permite establecer la existencia de puntos de no bloque y su prueba se basa en el teorema de Bing mencionado anteriormente ([3, Teorema 5]).

Teorema 3.3.3 *Sea X un continuo no degenerado. Entonces X tiene al menos dos puntos de no bloque.*

Demostración.

Sea $x \in X$. Por el Teorema 3.2.3, existe un punto $q \in X - \{x\}$ tal que $\bigcup\{A \in C(X) : x \in A \text{ y } q \notin A\}$ es densa en X. Como $X - \{x\}$ es abierto existe $r > 0$ tal que $B_r(q) \subset X - \{x\}$. Sea $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión donde $\varepsilon_n = \frac{r}{n}$ y $n \in \mathbb{N}$ y sea $B_{\varepsilon_n}(x)$ la bola abierta con centro en x y radio ε_n. Para $n = 1$, sea A_1 la componente de $X - B_{\varepsilon_1}$ que contiene a x. Como $X - B_1$ es cerrado, A_1 es cerrado en X y al ser conexo A_1 es un subcontinuo propio de X. Para $n \geq 2$, sea A_n la componente de $X - B_{\varepsilon_n}$ que contiene a A_{n-1}, similarmente al argumento anterior A_n es un subcontinuo propio de X. Así, $A_n \subset A_{n+1}$ para $n = 1, 2, ...$ y por el Teorema 3.2.3, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$ es densa en X y $q \notin A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, q es un punto de no bloque de X. Si hacemos $x = q$, existe $p \in X$ distinto de q tal que p es punto de no bloque de X, entonces X tiene al menos dos puntos de no bloque. ■

Lema 3.3.4 *Sean X un continuo irreducible y p un punto de irreducibilidad de X. Entonces p es un punto de no bloque.*

Demostración.

Sea p un punto de irreducibilidad de X, entonces para algún punto $q \in X - \{p\}$ ningún subcontinuo propio de X contiene a $\{p, q\}$, es decir, $p \notin K(q)$. Por el Lema 2.1.10, $K(q)$ puede ser expresada como unión numerable de subcontinuos propios de X que contienen a q y por el Lema 2.1.9, $K(q)$ es densa en X. Por lo tanto, p es un punto de no bloque. ■

Proposición 3.3.5 *[4, Proposición 3.5, pág. 11] Sea X un continuo encadenable y sea $p \in X$. Entonces las siguientes propiedades de p son equivalentes:*

(i) *p es un punto de irreducibilidad;*

(ii) *p es un punto de no bloque.*

Es necesario pedir que X sea encadenable, de lo contrario la proposición anterior no se cumple. Consideremos el punto p en la Hache (Figura 3.3), es un punto de no bloque pero no es punto de irreducibilidad.

Lema 3.3.6 *[4, Lema 3.1, pág. 9] Sea X un continuo encadenable tal que $X = K \cup L$ para dos subcontinuos propios K y L de X. Entonces cada punto de $K \cap L$ es un centro fuerte de X.*

De acuerdo a la definición de centro fuerte podemos decir que un punto p no es centro fuerte si cada par de conjuntos abiertos de X son intersectados por un subcontinuo que no contiene a p. Intuitivamente un punto que no es centro fuerte es como se muestra en la Figura 3.19.

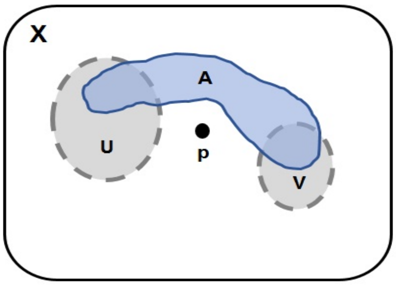


Figura 3.19: p no es centro fuerte.

Proposición 3.3.7 *Sea X un continuo encadenable y sea $p \in X$. Si p es un punto que no es centro fuerte, entonces p es punto de no bloque de X.*

Demostración.

Por el Corolario 3.3.4, sin pérdida de generalidad podemos suponer que X es un continuo descomponible. Sea $X = K \cup L$, donde K, L son subcontinuos propios, no vacíos de X. Sea $p \in X$ punto que no es centro fuerte. Por el Lema 3.3.6, $p \notin K \cap L$. Sin pérdida de generalidad supongamos $p \in K - L$. Sea $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de subconjuntos abiertos y no vacíos de $X - \{p\}$ (existe pues por la Proposición 1.3.19 todo espacio métrico es segundo numerable y además es una propiedad hereditaria). Como p no es centro fuerte para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un subcontinuo M_n que intersecta a B_n y $X - K$ y tal que $p \notin M_n$. Sea $A_n = L \cup M_1 \cup \cdots \cup M_n$. Observemos que $L \cap M_i \neq \emptyset$ de lo contrario, si $L \cap M_i = \emptyset$ para alguna $i \in \{1, 2, ...\}$, entonces $M_i \subset (X - L)$ y como $M_i \cap (X - K) \neq \emptyset$ se sigue que $M_i \subset (X - L) \cap (X - K) = \emptyset$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $L \cap M_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, ...\}$. Así, por el Teorema 1.3.22, A_n es conexo y es cerrado en X por ser unión finita de cerrados de X, en consecuencia A_n es un subcontinuo de X que no contiene a p, además $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es densa en X por construcción de cada A_n. Por lo tanto, p es punto de no bloque.
■

Otro de los resultados dados en [4] por J. Bobok, P. Pyrih y B. Vejnar es la siguiente proposición donde se relacionan los puntos extremos y los puntos de no bloque en un continuo encadenable.

Proposición 3.3.8 *[4, Proposición 3.9, pág. 13] Sea X un continuo encadenable y sea $p \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *p es un punto extremo;*

(ii) *p es un punto de no bloque para cada subcontinuo de X que contiene a p.*

3.4 Z-Puntos

Existe otra clase de puntos llamados z-puntos que son un tanto distintos a los puntos de no corte, orilla y los de no bloque pues dependen de la existencia de una función continua tal que la distancia del punto a su imagen no sea muy grande. Estos puntos resultan interesantes ya que en principio no podemos garantizar su existencia.

Definición 3.4.1 *Dado un continuo X diremos que un punto p de X es z-punto si para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua $f_\varepsilon : X \longrightarrow X - \{p\}$ tal que $d(x, f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in X$.*

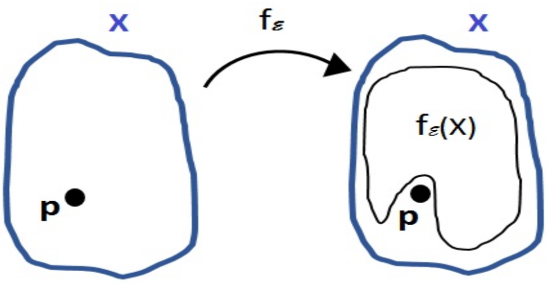
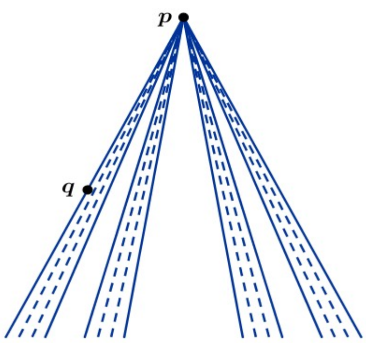


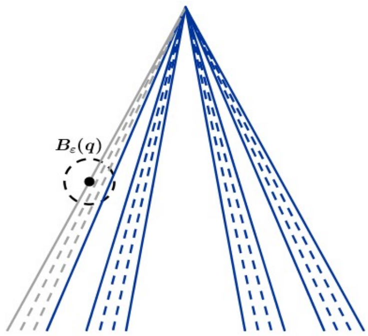
Figura 3.20: f_ε.

Intuitivamente para que p pueda ser un z-punto, entonces la imagen de la función f_ε es como se muestra en la Figura 3.20.



Abanico de Cantor.

En el abanico de Cantor el punto q es un z-punto y la idea es definir una función que proyecte los segmentos que intersectan a $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(r)$ al segmento más próximo de tal forma que ya no intersecte a $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(r)$ y a los demás segmentos los deje igual. Tomando en cuenta que las proyecciones son funciones continuas ([5, proposición 4.12, pág. 117]) y además como $d(x, f(x)) < \varepsilon$ se concluye que q es un z-punto. El punto p no es z-punto. Más adelante se probará que si un punto es z-punto, entonces es un punto de no corte.



3.4.2 Resultados de z-puntos

Proposición 3.4.3 *Sea X un arco. Entonces los únicos z-puntos de X son los extremos.*

Demostración.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $X = [0, 1]$.

(1) Si $p \in \{0, 1\}$, veamos que p es un z-punto de X. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Si $p = 0$, consideremos $f_\varepsilon : [0, 1] \longrightarrow \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ como:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ x & si \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Si $p = 1$, consideremos $f_\varepsilon : [0, 1] \longrightarrow \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ como:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} & si \quad 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

En ambos casos la función f_ε es continua (Lema 1.3.46) y $d(x, f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in X$. Por lo tanto, p es un z-punto.

(2) Veamos ahora que si $p \in [0, 1]$ y p es un z-punto, entonces $p = 0$ ó $p = 1$.
Sea $p \in (0, 1)$ y supongamos que p es z-punto de X. Sean $r =$mín $\{d(p, 1), d(0, p)\}$ y $\varepsilon = \frac{r}{2}$, entonces existe $f_\varepsilon : X \longrightarrow X - \{p\}$ una función continua tal que $d(x, f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Observemos que $f_\varepsilon(X) \subseteq [0, p) \cup (p, 1]$. Si $f_\varepsilon(X) = [0, p) \cup (p, 1]$, entonces $f_\varepsilon(X)$ es disconexo pues es la unión de dos abiertos, ajenos y no vacíos. Pero la imagen continua de conexos es

conexo (Proposición 1.3.47), por lo que podemos suponer que $f_\varepsilon(X) \subset [0, p)$, entonces $f_\varepsilon(1) \in [0, p)$ lo que implica que $d(1, f_\varepsilon(1)) > \varepsilon$, llegando a una contradicción. Por lo tanto, si $p \in (0, 1)$ no es z-punto.

■

Proposición 3.4.4 *Sean X un continuo y $p \in X$. Si p es un z-punto, entonces p es un punto orilla.*

Demostración.

Sean $\varepsilon > 0$ y p un z-punto de X, entonces existe $f_\varepsilon : X \longrightarrow X - \{p\}$ una función continua tal que $d(x, f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Como X es un continuo y f_ε continua se tiene que $f_\varepsilon(X)$ es un continuo (Proposición 1.3.47 y Proposición 1.3.47). Consideremos $A = f_\varepsilon(X)$, observemos que $p \notin A$ ($Imf_\varepsilon \subseteq X - \{p\}$). Veamos que $H(X, A) < \varepsilon$. Como $A \subset X$, entonces $A \subset N(\varepsilon, X)$, basta ver que $X \subset N(\varepsilon, A)$. Sea $x \in X$, por hipótesis $d(x, f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ donde $f_\varepsilon(x) \in A$. Por lo tanto, p es un punto orilla. ■

Proposición 3.4.5 *[16, Proposición 9.26, pág. 153] Sea X una gráfica no degenerada y sea p un punto de X tal que no pertenece a ninguna curva cerrada simple de X. Entonces p es un punto de no corte si y sólo si p es un punto extremo.*

Teorema 3.4.6 *Sea X una gráfica no degenerada y sea p un punto de X tal que no pertenece a ninguna curva cerrada simple de X. Entonces p es un z-punto si y sólo si p es un punto extremo.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que p es un z-punto de X. Sea α un arco en X que contiene a p y supongamos que p no es un punto extremo de α. Dado que las gráficas son localmente conexas por el Teorema 3.2.20, X sólo tiene dos tipos de puntos de corte y orilla. Como estamos suponiendo que p no es punto extremo, entonces p es un punto de corte (Proposición 3.4.5). Por la Proposición 3.2.19, p no es punto orilla y por la Proposición 3.4.4, p no es un z-punto contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, p es un punto extremo de α.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que p es un punto extremo de X, por lo que para cualquier arco α de X que contiene a p se tiene que p es punto extremo de α. Sea $\varepsilon > 0$, por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Sea h_1 el homeomorfismo entre α e I, $h_1 : \alpha \longrightarrow I$ y sea $h_2 : I \longrightarrow \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, la función definida por

$$h_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ x & si \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Consideremos:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} x & si \quad x \notin \alpha \\ g(x) & si \quad x \in \alpha \end{cases}$$

donde $g(x) = h_2(h_1(x))$. Así, $f_\varepsilon(x)$ es una función continua tal que $d(x, f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$. Por lo tanto, p es un z-punto. ∎

Capítulo 4

Relaciones entre los conjuntos $L(X), O(X), M(X)$ y $Z(X)$

Como ya mencionamos anteriormente es natural conocer el comportamiento de puntos en un continuo, pues nos permite decir cuando dos espacios son homeomorfos, por lo que resulta interesante saber si los conjuntos de puntos de no corte, orilla, no bloque y z- puntos tienen alguna relación.

4.1 Definiciones: L(X), O(X), M(X) y Z(X)

Comenzemos con las definiciones de estos conjuntos.

Definición 4.1.1 *Dado un continuo X, denotaremos por:*

(a) $\boldsymbol{L(X)}$ *al conjunto de puntos en X que son de no corte, es decir,*

$$L(X) = \{x \in X : x \textbf{ es un punto de no corte}\}.$$

(b) $\boldsymbol{O(X)}$ *al conjunto de puntos en X que son orilla, es decir,*

$$O(X) = \{x \in X : x \textbf{ es un punto orilla}\}.$$

(c) $\boldsymbol{M(X)}$ *al conjunto de puntos en X que son de no bloque, es decir,*

$$M(X) = \{x \in X : x\textbf{es un punto de no bloque}\}.$$

(d) $\boldsymbol{Z(X)}$ *al conjunto de puntos en X que son z-puntos, es decir,*

$$Z(X) = \{x \in X : x\textbf{es un z-punto}\}.$$

4.2 Ejemplos

1. En el abanico pata alargada (Figura 4.1), el conjunto

$$L(X) = (pq) - \{p, q\} \cup \{r, n_1, n_2, n_3, ...\},$$

donde pq es el segmento con extremos p y q.

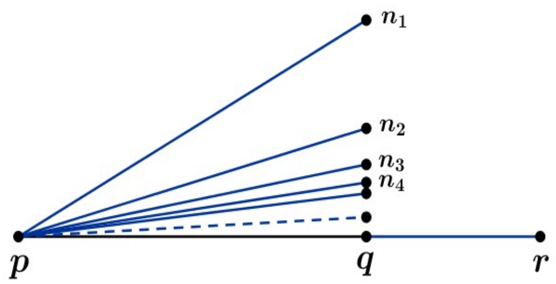


Figura 4.1: Abanico pata alargada.

2. En el peine (Figura 4.2), el conjunto $O(X) = J \cup \{n_1, n_2, n_3...\}$.

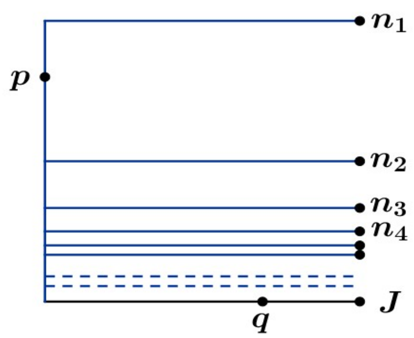


Figura 4.2: Peine.

3. En el continuo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ (Figura 4.3), el conjunto $M(X) = J \cup \{r\}$.

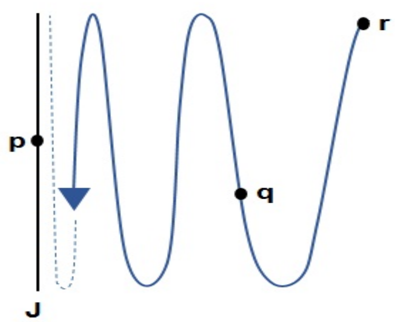
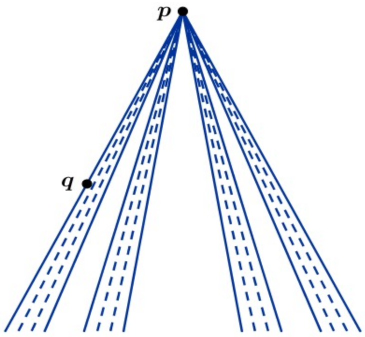


Figura 4.3: Continuo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$.

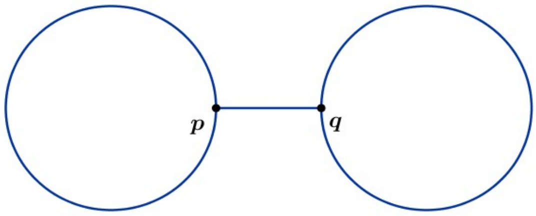
4. En el abanico de Cantor (Figura 4), el conjunto $Z(X) = X - \{p\}$.



Abanico de Cantor.

A diferencia de los puntos de no corte, orilla y no bloque, el conjunto $Z(X)$ es la primera clase de puntos que puede ser vacío, un ejemplo de ello es considerar la circunferencia unitaria S^1, este es un continuo que no tiene z-puntos, es decir, el conjunto $Z(X)$ es vacío. Para mostrar que un punto de la circunferencia no es z-punto se requiere estudiar al grupo fundamental de la circunferencia [11]. A continuación veremos algunos ejemplos en donde es posible clasificar a los continuos a partir del número de z-puntos que se tienen, los ejemplos (b), (c) y (d) son una aplicación del Teorema 3.4.6.

(a) Continuo sin z-puntos.

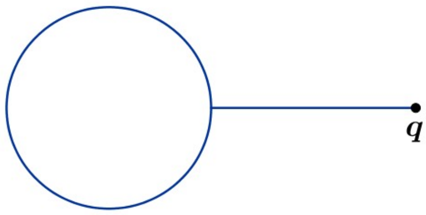


Pesas.

Pesas: $\mathcal{P}^* = S^1 \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{S}^*$, donde $\mathcal{R} = [1,2] \times \{0\}$ y $\mathcal{S}^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 = 1\}$.

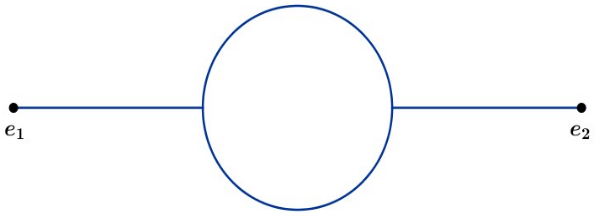
Veamos que este continuo no tiene z-puntos: Si r esta en el segmento pq, entonces r es un punto de corte y como se verá más adelante un punto de corte no puede ser z-punto (Proposición 4.4.3). Considere $r \in S^1$. Si r es un z-punto, entonces existe $f_\varepsilon : \mathcal{P}^* \to \mathcal{P}^* - \{r\}$ una función continua tal que $d(x, f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in \mathcal{P}^*$. Por la Proposición 1.3.45, $f_\varepsilon|_{S^1} : S^1 \to \mathcal{P}^* - \{r\}$ es una función continua con $d(x, f_\varepsilon|_{S^1}(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in S^1$. En consecuencia, por ser S^1 conexo y compacto su imagen es homeomorfo a un intervalo ó a un triodo, lo cual intuitivamente nos dice que podemos romper la circunferencia continuamente, lo cual es una contradicción. Así, $r \in S^1$ no es z-punto. De manera similar se tiene que $r \in \mathcal{S}^*$ no es z-punto.

(b) Continuo con solo un z-punto.



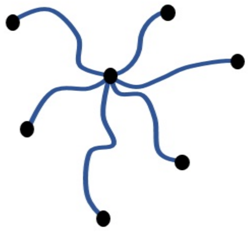
Paleta.

(c) Continuo con dos z-puntos.



Aceituna.

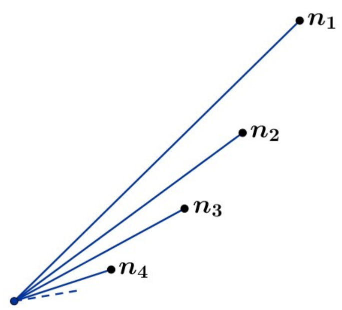
(d) Continuo con n z-puntos.



n-odo.

***n*-odo:** Es la unión de n arcos que se intersectan dos a dos en un único punto llamado vértice del n-odo, dicho vértice tiene que ser un extremo de cada uno de los n arcos y los otros extremos de los arcos se llaman extremos del n-odo.

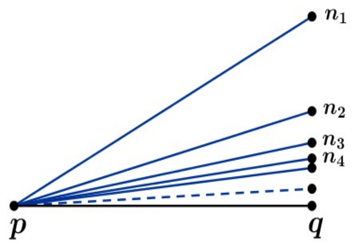
(e) Continuo con una cantidad numerable de z-puntos.



F_ω.

$$\boldsymbol{F_\omega} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Y_i \text{ donde } Y_i = \{\left(\tfrac{r}{i+1}, \tfrac{r}{(i+1)^2}\right) \in \mathbb{R}^2 : r \in [0,1]\}.$$

(f) Continuo con una cantidad no numerable de z-puntos.



Abanico armónico.

4.3 Propiedades

Notemos que por el Corolario 3.1.5, Teorema 3.2.4 y el Teorema 3.3.3, los conjuntos $L(X)$, $O(X)$ y $M(X)$ nunca son vacíos.

Existen continuos tales que todos sus puntos son orilla como el continuo S^1 (Figura 2.3). Hacer una lista de estos continuos puede resultar un poco complicado. Sin embargo, tomando en cuenta el Lema 2.2.17 y el Teorema 3.2.13 podemos conocer una familia de continuos que cumplen con esta propiedad. Por ejemplo, el arcoiris de Knaster es un continuo indescomponible y cada uno de sus puntos es orilla (Figura 2.12).

Proposición 4.3.1 *Si X es un continuo indescomponible, entonces $O(X) = X$.*

Demostración.

Como X es indescomponible por el Lema 2.2.17, cada punto de X es de irreducibilidad y por el Teorema 3.2.13, cada punto de X es punto orilla, así $O(X) = X$. ∎

Al igual que los puntos orilla podemos conocer algunos continuos que cumplen que todo punto es punto de no bloque.

Corolario 4.3.2 *Sea X un continuo encadenable. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) *cada punto de X es un punto de no bloque;*

(ii) *X es indescomponible.*

Demostración.

Supongamos que cada punto de X es punto de no bloque, por la Proposición 3.3.5, cada punto de X es de irreducibilidad y por el Lema 2.2.17, X es indescomponible. Ahora, supongamos que X es indescomponible. Por el Lema 2.2.17, cada punto de X es punto de irreducibilidad y por la Proposición 3.3.5, cada punto es de no bloque. ■

Es necesario pedir que X sea encadenable para que la proposición anterior se cumpla, pues si consideramos $p \in S^1$ (Figura 2.3) se tiene que p es de no bloque pero no es de irreducibilidad.

4.4 Relaciones

Por la Proposición 3.2.19, se puede observar que $O(X) \subseteq L(X)$.

El siguiente ejemplo nos muestra que si p es un punto de no corte no necesariamente p es orilla. Así, $L(X) \not\subseteq O(X)$.

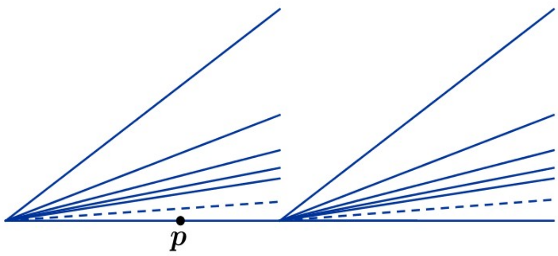


Figura 4.4: Doble abanico armónico.

Doble abanico armónico: Consideremos la sucesión armónica $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces $X = Y \cup Z$, donde Y es el abanico armónico y $Z = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} l_n\right) \cup \{\alpha\}$, l_n son los segmentos de línea recta que une los puntos $(2, \frac{1}{n})$ y $(0,1)$ y α es el segmento de línea recta que une el punto $(0,1)$ con $(0,2)$.

La siguiente proposición nos muestra que $M(X) \subseteq O(X)$.

Proposición 4.4.1 *Sean X un continuo y $p \in X$. Si p es un punto de no bloque, entonces p es un punto orilla.*

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Como p es de no bloque existe $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de subcontinuos en X tal que $A_n \subset X \setminus \{p\}$ para todo n y $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$.
Sean $r_n = H(A_n, X)$, entonces $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \cdots$ y $r_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\varepsilon \leq r_k$ para algún k, entonces existe $j > k$ tal que $r_j < \varepsilon$ pues $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es densa en X. Consideremos $C = A_j$, entonces $H(C, X) < r_j < \varepsilon$ y $p \notin C$. Si $\varepsilon > r_k$ para todo k entonces consideramos $C = A_1$, $H(C, X) < r_1 < \varepsilon$ y $p \notin C$. Por lo tanto, p es un punto orilla de X. ■

El siguiente ejemplo nos muestra que si p es un punto orilla no necesariamente p es de no bloque. Así, $O(X) \nsubseteq M(X)$.

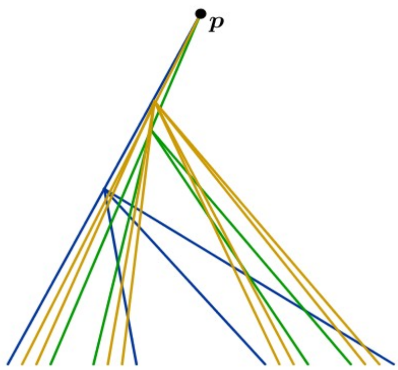


Figura 4.5: Dendroide sobre el conjunto de Cantor.

La construcción del dendroide sobre el conjunto de Cantor se puede ver en [4, pág. 5] y en la Figura 4.4 se muestra una parte de su construcción.

La siguiente proposición nos muestra que $M(X) \subseteq L(X)$.

Proposición 4.4.2 *Sean X un continuo y $p \in X$. Si p es un punto de no bloque, entonces p es un punto de no corte.*

Demostración.

Supongamos que p es un punto de corte, por la Proposición 3.2.19, p no es un punto orilla, y por la Proposición 4.4.1, p es un punto que bloquea, lo cual es una contradicción, por lo que p es un punto de no corte. ■

El ejemplo de la Figura 4.5, nos muestra que si p es un punto de no corte no necesariamente p es de no bloque y por tanto $L(X) \nsubseteq M(X)$.

Haciendo un diagrama sobre los resultados que se han obtenido tenemos:

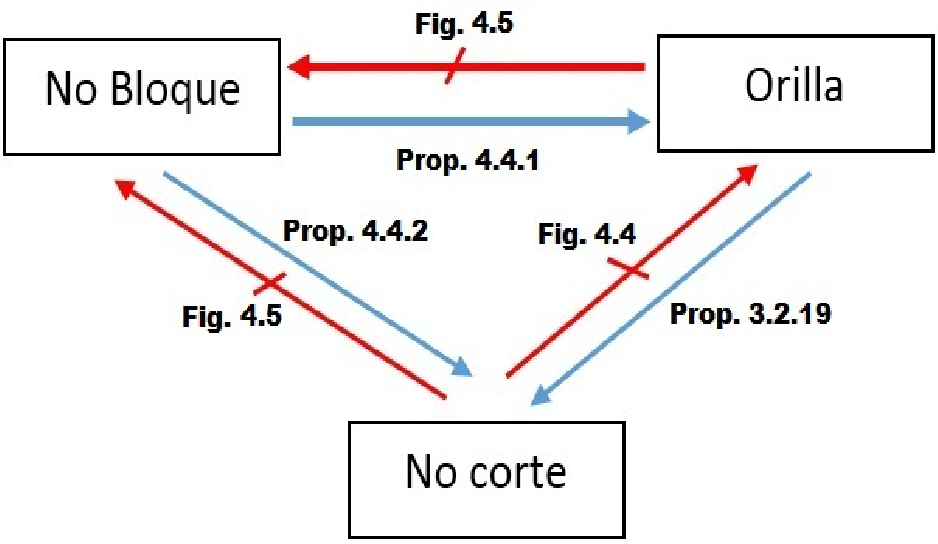


Figura 4.6: Diagrama de implicaciones 1.

Por la Proposición 3.4.4, se puede observar que $Z(X) \subseteq O(X)$.

El siguiente ejemplo nos muestra que la otra contención no necesariamente es cierta, es decir, $O(X) \nsubseteq Z(X)$.

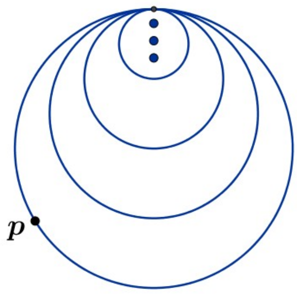


Figura 4.7: Arete Hawaiiano.

Arete Hawaiiano: $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ donde C_i es el círculo en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(0, 1 - 2^{-i})$ y radio 2^{-i}.

La siguiente proposición nos muestra que $Z(X) \subseteq L(X)$.

Proposición 4.4.3 *Sean X un continuo y $p \in X$. Si p es un z-punto, entonces p es un punto de no corte.*

Demostración.

Supongamos que p es un punto de corte, por la Proposición 3.2.19, p no es orilla y por la Proposición 3.4.4, p no es z-punto llegando a una contradicción, por tanto p es de no corte. ■

El continuo S^1 es ejemplo en el cual cada uno de sus puntos es un punto de no corte y sin embargo no tiene z-puntos. Por tanto se tiene que $L(X) \nsubseteq Z(X)$.

La paleta $\mathcal{P}$ (Figura 3.10) es un ejemplo que nos muestra que si p es un punto de no bloque no necesariamente p es un z-punto.

Recordemos que la paleta se define como $\mathcal{P} = S^1 \cup ([1,2] \times \{0\})$. Sea $p \in S^1 - \{(0,1)\}$ veamos que p es un punto de no bloque. Consideremos $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ y $U_n = B_\varepsilon(p) \cap \mathcal{P}$, por lo que U_n es un abierto que contiene a p. Sea $A_n = \mathcal{P} \setminus U_n$, A_n es cerrado y conexo. Observemos que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ y $\lim_{n\to\infty} A_n = \mathcal{P}$ por lo que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es densa en $X = \mathcal{P}$, mostrando así que p es un punto de no bloque. Sin embargo, p no es un z-punto. Así, $M(X) \nsubseteq Z(X)$.

Completando el diagrama tenemos las implicaciones siguientes entre los puntos de no corte, orilla, no bloque y z-puntos.

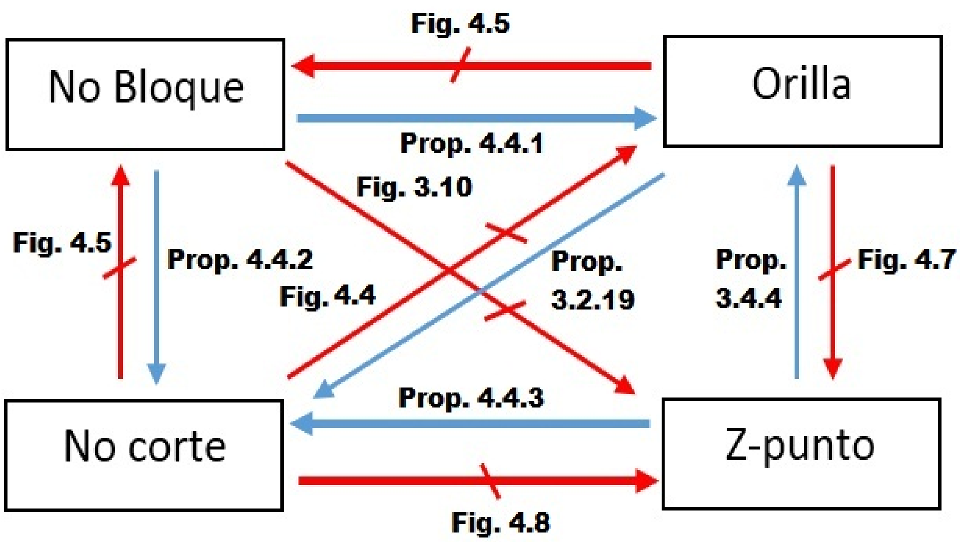


Figura 4.8: Diagrama de implicaciones 2.

(...) parecía que habíamos llegado al
final del camino y resulta que era
sólo una curva abierta a otro paisaje
y a nuevas curiosidades...

José Saramago.

Bibliografía

[1] D. Anderson, *On topological infinite deficiency*, Michigan Math. J. 14 (1967) 365–383.

[2] D. Anderson, *Shore and non-block points in Hausdorff continua*, Topology and its Applications. 193 (2015) pp. 152-161.

[3] R. H. Bing, *Some Characterizations or Arcs and Simple Closed Curves*, American Journal of Mathematics. Vol.70, No.3 (Julio, 1948) pp. 497-506.

[4] J. Bobok, P. Pyrih, B. Vejnar, *Non-cut, shore and non-block points in continua*, Glas. Mat (2016), forthcoming.

[5] F. Casarrubias, A. Tamariz, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, serie de textos nivel medio 37, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2012.

[6] T. Chapman, *Lectures on Hilbert Cube Manifolds*, CBMS Regional Conf. Ser. Math., vol. 28, AMS, Providence, RI, 1976, x+131 pp.

[7] J.J. Charatonik, *History of continuum theory*, Handbook of the history of general topology, Vol. 2, 703-786, Hist. Topol. 2, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1998.

[8] B. Honari, Y. Bahrampour, *Cut point spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999) 2797–2803.

[9] A. Illanes, P. Krupski, *Blockers in hyperspaces*, Topology and its Applications. 158 (2011) pp. 653-659.

[10] A. Illanes, *Finite Unions of Shore Sets*, Rediconti Del Circolo Matematico Di Palermo V (II) (2001) pp. 483–498.

[11] A. Illanes, R. A. Juárez-Ojeda, J. M. Martínez-Montejano, *Z-sets in symmetric products*, to appear in Houston Journal of Mathematics.

[12] R. Leonel, *Shore points of a continuum*, Topology and its Applications. 161 (2014) pp. 433-441.

[13] S. Macías, *La Estructura de los dendroides suaves*, Aportaciones Matemáticas, comunicaciones 10, Sociedad Matemática Mexicana, México, 1993.

[14] L. Montejano, I. Puga, *Shore points in dendroids and Canonical pointed hyperspaces*, Topology and its Applications. 46 (1992) pp. 41-54.

[15] R. L. Moore, *Concerning simple continuous curves*, Trans. Amer. Math. Soc. 21 (1920),333-347.

[16] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure ans Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[17] V. Nall, *Center and Shore points of a dendroid*, Topology and its Applications. 154 (2007) pp. 2167-2172.

[18] V. Neumann-Lara, I. Puga, *Shore points and dendrites*, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 939-942.

[19] P. Pyrih, B. Vejnar, *A lambda-dendroid with two shore points whose union is not a shore set*, Topology and its Applications. 159 (2012) pp. 69-74.

[20] G. Whyburn, *Concerning the cut points of continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928) pp. 597-609.